

(1)

a, b, c, d が全て正の実数であることに注意すると,

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} a^2 - bc & ab - bd \\ -ac + cd & -bc + d^2 \end{pmatrix} \\ &= O \\ \Leftrightarrow a &= d = \sqrt{bc} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a = d = \sqrt{bc}$$

(2)

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{bc} & b \\ -c & -\sqrt{bc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{bc}x + by \\ -cx - \sqrt{bc}y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow y &= -\sqrt{\frac{c}{b}}x \end{aligned}$$

である。これと $x^2 + y^2 = b + c$ とから,

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{c}{b}x^2 &= b + c \\ \Leftrightarrow x^2 &= b \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{b} \quad (\because x > 0) \end{aligned}$$

である。また,

$$y = -\sqrt{c}$$

である。

$$(\text{答}) \quad x = \sqrt{b}, y = -\sqrt{c}$$

(3)

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x & z \\ y & x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & z \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

なので, $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ かつ $A \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が成り立つための実数 z を求めればよい。(2)より,

$x = \sqrt{b}, y = -\sqrt{c}$ の下で $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は成り立っている。よって,

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{bc} & b \\ -c & -\sqrt{bc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \sqrt{b} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{b} \\ -\sqrt{c} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{bc}z + b\sqrt{b} \\ -cz - b\sqrt{c} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{b} \\ -\sqrt{c} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow z &= \frac{1-b}{\sqrt{c}} \end{aligned}$$

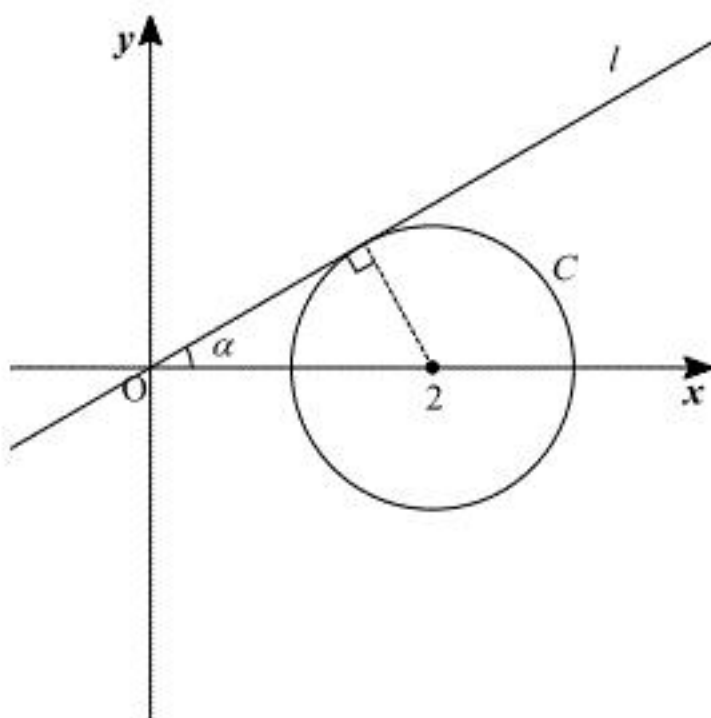
である。

$$(\text{答}) \quad z = \frac{1-b}{\sqrt{c}}$$

2

(1)

C と l が共有点を持つ θ が最大になるのは、次図のように C と l が接するときである。



C と l が接する条件は、点と直線の距離の公式より、

$$\frac{|2 \tan \theta|}{\sqrt{\tan^2 \theta + 1}} = 1$$

$$\Leftrightarrow |2 \tan \theta| = \sqrt{\tan^2 \theta + 1}$$

である。両辺が正なので、2 乗しても同値性は失われず、

$$4 \tan^2 \theta = \tan^2 \theta + 1$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 \theta = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \tan \theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

となる。ここで、 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ に注意すると、 $\theta = \frac{\pi}{6}$ のときに C と l は接することが分かる。

よって、 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ である。

(答) $\alpha = \frac{\pi}{6}$

(2)

[1] $\theta = 0$ のとき

C と l の共有点のうち原点に近い点は $(1, 0)$ であるから、

$$f(0) = 1$$

である。

[2] $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき

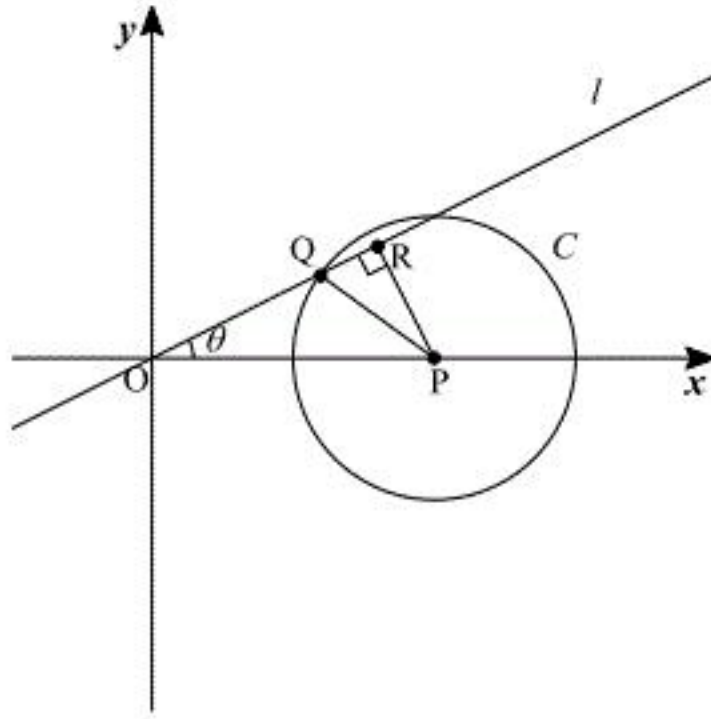
C と l の共有点と原点との距離は、三平方の定理より、

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

である。

[3] $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$ のとき

円 C の中心を $P(2, 0)$ 、 C と l の共有点のうち原点に近い点を Q 、 C から l に下ろした垂線の足を R とおく。



まず、 $OP = 2$ であるから、 $OR = 2 \cos \theta$ である。

また、 $PQ = 1$ 、 $PR = \frac{|2 \tan \theta|}{\sqrt{\tan^2 \theta + 1}}$ であるから、三平方の定理より、

$$\begin{aligned} QR &= \sqrt{1^2 - \left(\frac{|2 \tan \theta|}{\sqrt{\tan^2 \theta + 1}} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1 - 3 \tan^2 \theta}{\tan^2 \theta + 1}} \\ &= \sqrt{\cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{4 \cos^2 \theta - 3} \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} f(\theta) &= OQ \\ &= OR - QR \\ &= 2 \cos \theta - \sqrt{4 \cos^2 \theta - 3} \end{aligned}$$

である。これは、 $\theta = 0, \frac{\pi}{6}$ のときも成り立つ。

以上より、 C と l が共有点を持つとき、

$$f(\theta) = 2 \cos \theta - \sqrt{4 \cos^2 \theta - 3}$$

である。

(答) $f(\theta) = 2 \cos \theta - \sqrt{4 \cos^2 \theta - 3}$

(3)

(1), (2) の答を用いると、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \{f(\theta)\}^2 d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(2 \cos \theta - \sqrt{4 \cos^2 \theta - 3} \right)^2 d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(8 \cos^2 \theta - 3 - 4 \cos \theta \sqrt{4 \cos^2 \theta - 3} \right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(8 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} - 3 - 4 \cos \theta \sqrt{1 - 4 \sin^2 \theta} \right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + 4 \cos 2\theta) d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(4 \cos \theta \sqrt{1 - 4 \sin^2 \theta} \right) d\theta \end{aligned}$$

となる。さらに、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + 4 \cos 2\theta) d\theta &= [\theta + 2 \sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \end{aligned}$$

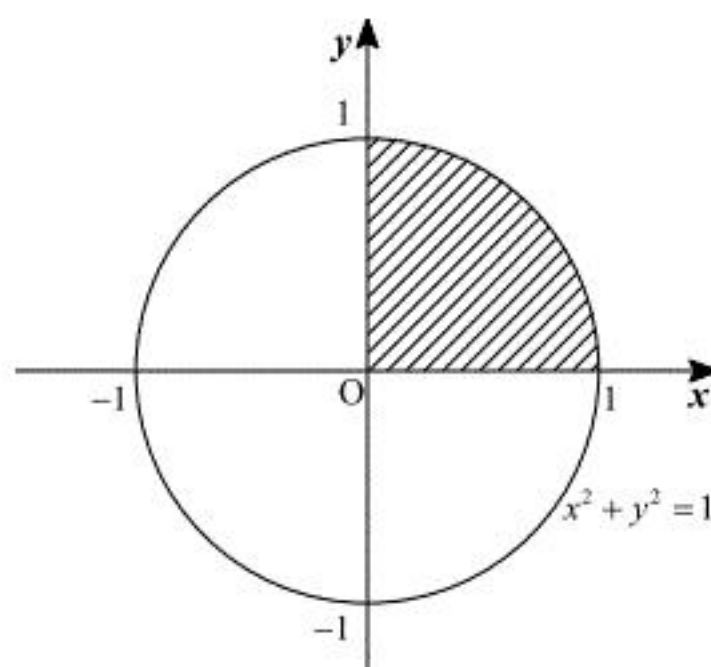
であり、 $t = 2 \sin \theta$ とおくと、 $dt = 2 \cos \theta d\theta$ であるから、

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(4 \cos \theta \sqrt{1 - 4 \sin^2 \theta} \right) d\theta = 2 \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt$$

となる。ここで、 $\int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt$ は次図斜線部の面積であるから、

$$\int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt = \frac{\pi}{4}$$

である。



以上より、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \{f(\theta)\}^2 d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + 4 \cos 2\theta) d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(4 \cos \theta \sqrt{1 - 4 \sin^2 \theta} \right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 2 \cdot \frac{\pi}{4} \\ &= \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \{f(\theta)\}^2 d\theta = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

(1)

$$x+y=\sqrt{3}a \Leftrightarrow x+y-\sqrt{3}a=0$$

であるから、点と直線の距離の公式より

$$f(t)=\frac{\left|a\cos t+\sqrt{a^2-1}\sin t-\sqrt{3}a\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\sqrt{2a^2-1}\sin(t+\alpha)-\sqrt{3}a\right|$$

となる。ただし α は

$$\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{2a^2-1}}, \cos\alpha=\frac{\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2a^2-1}}, -\pi<\alpha\leq\pi$$

を満たす角とする。ここで、

$$\begin{aligned} & \sqrt{3}a-\sqrt{2a^2-1}\sin(t+\alpha) \\ & \geq \sqrt{3}a-\sqrt{2a^2-1} \quad (\because \sin(t+\alpha)\leq 1) \\ & = \sqrt{3a^2}-\sqrt{2a^2-1} \\ & > 0 \quad (\because a>1 \text{ より, } 0<2a^2-1<3a^2) \end{aligned}$$

であるから、

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{3}a-\sqrt{2a^2-1}\sin(t+\alpha)\right\}$$

となる。したがって、 $f(t)$ を最小にするには、 $\sin(t+\alpha)=1$ となるような t を選べば良い。このとき、 $f(t)$ の最小値は

$$m=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}a-\sqrt{2a^2-1}\right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad m=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}a-\sqrt{2a^2-1}\right)$$

(2)

m を a で微分すると、

$$\frac{dm}{da}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}-\frac{2a}{\sqrt{2a^2-1}}\right)$$

となる。ここで

$$g(a)=\frac{2a}{\sqrt{2a^2-1}} \quad (a>1)$$

とおくと、

$$g'(a)=\frac{2\cdot\sqrt{2a^2-1}-2a\cdot 4a\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2a^2-1}}}{2a^2-1}=-\frac{2}{(2a^2-1)^{\frac{3}{2}}}<0$$

であるから、 $g(a)$ は単調減少関数である。ここで、

$$\begin{aligned} & \frac{dm}{da}=0 \\ & \Leftrightarrow g(a)=\sqrt{3} \\ & \Leftrightarrow \frac{2a}{\sqrt{2a^2-1}}=\sqrt{3} \\ & \Leftrightarrow 2a=\sqrt{6a^2-3} \\ & \Leftrightarrow 4a^2=6a^2-3 \quad (\because a>1) \\ & \Leftrightarrow a^2=\frac{3}{2} \\ & \Leftrightarrow a=\sqrt{\frac{3}{2}} \quad (\because a>1) \end{aligned}$$

であるから、 m の増減表は次のようになる。

a	1	...	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	...
$\frac{dm}{da}$			0	+
m				

したがって m は $a=\sqrt{\frac{3}{2}}$ のとき、最小値

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{2\cdot\frac{3}{2}-1}\right)=\frac{1}{2}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2}$$

与えられたトランプ 7 枚を並べる場合の数は、

$$\frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1!} = 630 \text{ (通り)}$$

である。

(1)

点数が 7 点になるのは、最後の 1 枚で 4 種のマークが揃うときだから、7 枚目がスペードのときである。よって、残りの 6 枚の並び方は

$$\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 90 \text{ (通り)}$$

であるから、求める確率は、

$$\frac{90}{630} = \frac{1}{7}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{7}$$

(2)

点数が 6 点になるのは、次の 2 通りの場合がある。

[1] 6 枚目がスペードのとき

この場合、残りの 1 枚目から 5 枚目までと 7 枚目の 6 枚は任意の並べ方でよいから、(1)と同様にして、90 通りの並べ方がある。

[2] 6 枚目がスペード以外のとき

この場合、6 枚目のマークを A とすると、A を何にするかでスペード以外の 3 通りあり、また 7 枚目のマークも A でなければならないことがわかる。したがって、1 枚目から 5 枚目までの並べ方は、残りのマークが 2 種、2 枚ずつと、スペードが 1 枚なので、

$$\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 30 \text{ (通り)}$$

と求まり、全体として、 $3 \cdot 30 = 90$ 通りの並べ方がある。

以上、[1], [2] より求める確率は

$$\frac{90+90}{630} = \frac{2}{7}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{2}{7}$$

(3)

まず、点数が 4 点になる確率を考える。これは 1 枚目から 4 枚目までですべてのマークが 1 枚ずつ現れるので、その並べ方が $4! = 24$ 通りあり、さらに残りの 3 枚はスペード以外のマークが 1 枚ずつで、5 枚目から 7 枚目のその並べ方が $3! = 6$ 通りある。したがって、

$$24 \cdot 6 = 144 \text{ (通り)}$$

の並べ方があるから、求める確率は、

$$\frac{144}{630} = \frac{8}{35}$$

となる。

また、点数の定め方から、点数が 8 点以上や 3 点以下になることはない。したがって、点数が 5 点になる場合の数は、全体から、点数が 4, 6, 7 点になる場合の数を引いて求めることができ、いままでの計算から、

$$630 - (90 + 180 + 144) = 216 \text{ (通り)}$$

と求まる。よって、点数が 5 点になる確率は、

$$\frac{216}{630} = \frac{12}{35}$$

である。

以上より、点数の期待値は

$$4 \cdot \frac{8}{35} + 5 \cdot \frac{12}{35} + 6 \cdot \frac{2}{7} + 7 \cdot \frac{1}{7} = \frac{187}{35} \text{ (点)}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{187}{35} \text{ 点}$$