

1

(1)

2つの放物線の方程式,

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = 8x \end{cases}$$

より, y を消去すると,

$$\begin{aligned} x^4 &= 8x \\ \Leftrightarrow x(x-2)(x^2+2x+4) &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x-2)\{(x+1)^2+3\} &= 0 \\ \therefore x &= 0, 2 \end{aligned}$$

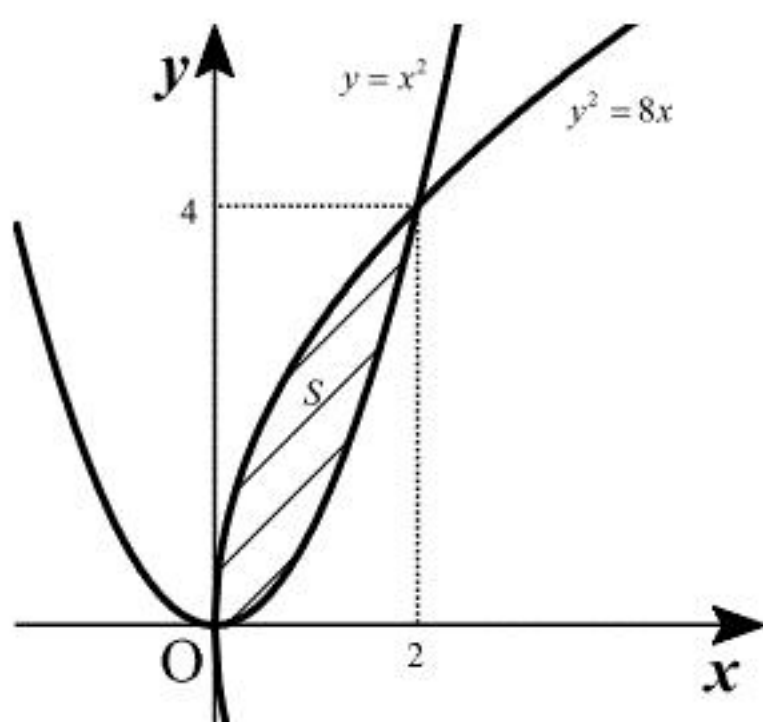
である。したがって, 2つの放物線の共有点の座標は,

$$(0, 0), (2, 4)$$

となる。

(答) $(0, 0), (2, 4)$

(2)



S は上図の斜線部のようになる。したがって, S の面積は,

$$\begin{aligned} \int_0^2 (2\sqrt{2x} - x^2) dx &= \left[\frac{4\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 \\ &= \frac{16}{3} - \frac{8}{3} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{8}{3}$

(3)

S を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積は,

$$\begin{aligned} \pi \int_0^2 \{8x - (x^2)^2\} dx &= \pi \int_0^2 (8x - x^4) dx \\ &= \pi \left[4x^2 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^2 \\ &= \pi \left(16 - \frac{32}{5} \right) \\ &= \frac{48}{5} \pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{48}{5} \pi$

(1)

a, b, c, d が全て正の実数であることに注意すると,

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} a^2 - bc & ab - bd \\ -ac + cd & -bc + d^2 \end{pmatrix} \\ &= O \\ \Leftrightarrow a &= d = \sqrt{bc} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a = d = \sqrt{bc}$$

(2)

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{bc} & b \\ -c & -\sqrt{bc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{bc}x + by \\ -cx - \sqrt{bc}y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow y &= -\sqrt{\frac{c}{b}}x \end{aligned}$$

である。これと $x^2 + y^2 = b + c$ とから,

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{c}{b}x^2 &= b + c \\ \Leftrightarrow x^2 &= b \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{b} \quad (\because x > 0) \end{aligned}$$

である。また,

$$y = -\sqrt{c}$$

である。

$$(\text{答}) \quad x = \sqrt{b}, y = -\sqrt{c}$$

(3)

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x & z \\ y & x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & z \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

なので, $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ かつ $A \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が成り立つための実数 z を求めればよい。(2)より,

$x = \sqrt{b}, y = -\sqrt{c}$ の下で $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は成り立っている。よって,

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{bc} & b \\ -c & -\sqrt{bc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \sqrt{b} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{b} \\ -\sqrt{c} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{bc}z + b\sqrt{b} \\ -cz - b\sqrt{c} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{b} \\ -\sqrt{c} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow z &= \frac{1-b}{\sqrt{c}} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad z = \frac{1-b}{\sqrt{c}}$$

(1)

$$x+y=\sqrt{3}a \Leftrightarrow x+y-\sqrt{3}a=0$$

であるから、点と直線の距離の公式より

$$f(t) = \frac{|a \cos t + \sqrt{a^2-1} \sin t - \sqrt{3}a|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} |\sqrt{2a^2-1} \sin(t+\alpha) - \sqrt{3}a|$$

となる。ただし α は

$$\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{2a^2-1}}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2a^2-1}}, -\pi < \alpha \leq \pi$$

を満たす角とする。ここで、

$$\begin{aligned} & \sqrt{3}a - \sqrt{2a^2-1} \sin(t+\alpha) \\ & \geq \sqrt{3}a - \sqrt{2a^2-1} \quad (\because \sin(t+\alpha) \leq 1) \\ & = \sqrt{3a^2} - \sqrt{2a^2-1} \\ & > 0 \quad (\because a > 1 \text{ より, } 0 < 2a^2-1 < 3a^2) \end{aligned}$$

であるから、

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{3}a - \sqrt{2a^2-1} \sin(t+\alpha) \right\}$$

となる。したがって、 $f(t)$ を最小にするには、 $\sin(t+\alpha)=1$ となるような t を選べば良い。このとき、 $f(t)$ の最小値は

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{3}a - \sqrt{2a^2-1})$$

となる。

$$(\text{答}) \quad m = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{3}a - \sqrt{2a^2-1})$$

(2)

m を a で微分すると、

$$\frac{dm}{da} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{3} - \frac{2a}{\sqrt{2a^2-1}} \right)$$

となる。ここで

$$g(a) = \frac{2a}{\sqrt{2a^2-1}} \quad (a > 1)$$

とおくと、

$$g'(a) = \frac{2 \cdot \sqrt{2a^2-1} - 2a \cdot 4a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2a^2-1}}}{2a^2-1} = -\frac{2}{(2a^2-1)^{\frac{3}{2}}} < 0$$

であるから、 $g(a)$ は単調減少関数である。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{dm}{da} &= 0 \\ \Leftrightarrow g(a) &= \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \frac{2a}{\sqrt{2a^2-1}} &= \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow 2a &= \sqrt{6a^2-3} \\ \Leftrightarrow 4a^2 &= 6a^2-3 \quad (\because a > 1) \\ \Leftrightarrow a^2 &= \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow a &= \sqrt{\frac{3}{2}} \quad (\because a > 1) \end{aligned}$$

であるから、 m の増減表は次のようになる。

a	1	...	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	...
$\frac{dm}{da}$			0	+
m		$\searrow$		$\nearrow$

したがって m は $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$ のとき、最小値

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{2 \cdot \frac{3}{2} - 1} \right) = \frac{1}{2}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2}$$

与えられたトランプ 7 枚を並べる場合の数は、

$$\frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1!} = 630 \text{ (通り)}$$

である。

(1)

点数が 7 点になるのは、最後の 1 枚で 4 種のマークが揃うときだから、7 枚目がスペードのときである。よって、残りの 6 枚の並び方は

$$\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 90 \text{ (通り)}$$

であるから、求める確率は、

$$\frac{90}{630} = \frac{1}{7}$$

となる。

(答) $\frac{1}{7}$

(2)

点数が 6 点になるのは、次の 2 通りの場合がある。

[1] 6 枚目がスペードのとき

この場合、残りの 1 枚目から 5 枚目までと 7 枚目の 6 枚は任意の並べ方でよいから、(1)と同様にして、90 通りの並べ方がある。

[2] 6 枚目がスペード以外の場合

この場合、6 枚目のマークを A とすると、A を何にするかでスペード以外の 3 通りあり、また 7 枚目のマークも A でなければならないことがわかる。したがって、1 枚目から 5 枚目までの並べ方は、残りのマークが 2 種、2 枚ずつと、スペードが 1 枚なので、

$$\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 30 \text{ (通り)}$$

と求まり、全体として、 $3 \cdot 30 = 90$ 通りの並べ方がある。

以上、[1], [2] より求める確率は

$$\frac{90+90}{630} = \frac{2}{7}$$

となる。

(答) $\frac{2}{7}$

(3)

まず、点数が 4 点になる確率を考える。これは 1 枚目から 4 枚目までですべてのマークが 1 枚ずつ現れるので、その並べ方が $4! = 24$ 通りあり、さらに残りの 3 枚はスペード以外のマークが 1 枚ずつで、5 枚目から 7 枚目のその並べ方が $3! = 6$ 通りある。したがって、

$$24 \cdot 6 = 144 \text{ (通り)}$$

の並べ方があるから、求める確率は、

$$\frac{144}{630} = \frac{8}{35}$$

となる。

また、点数の定め方から、点数が 8 点以上や 3 点以下になることはない。したがって、点数が 5 点になる場合の数は、全体から、点数が 4, 6, 7 点になる場合の数を引いて求めることができ、いままでの計算から、

$$630 - (90 + 180 + 144) = 216 \text{ (通り)}$$

と求まる。よって、点数が 5 点になる確率は、

$$\frac{216}{630} = \frac{12}{35}$$

である。

以上より、点数の期待値は

$$4 \cdot \frac{8}{35} + 5 \cdot \frac{12}{35} + 6 \cdot \frac{2}{7} + 7 \cdot \frac{1}{7} = \frac{187}{35} \text{ (点)}$$

となる。

(答) $\frac{187}{35}$ 点