

数 学

(理 学 部 数 学 科)

(平 成 2 3 年 度)

問題冊子 1～4 ページ 答案用紙 4 枚

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけない。
2. 配布された用紙に、枚数の不足や印刷不鮮明な箇所がある場合には申し出ること。
3. 受験番号は、答案用紙1枚ごとに所定の欄2箇所必ず記入すること。記入を忘れたり、誤った番号を記入したときは採点されないことがある。
4. 解答は必ず答案用紙の指定された箇所へ記入すること。やむをえず裏面にまで解答が及ぶ場合には、その旨を明記し、かつ、受験番号等を記入する部分(上部、右部分)の裏には記入しないこと。
5. 試験が終了したら、4枚の答案用紙を上から(その1)、(その2)、(その3)、(その4)の順になるように机上におくこと。
6. 退場するときは、問題冊子を持ち帰ること。

1

a, b, c, d は正の実数とし, 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ が $A^2 = O$ を満たすとする。ただし $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) a, d を b, c を用いて表せ。

(2) 次の条件をすべて満たす x, y を b, c を用いて表せ。

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^2 + y^2 = b + c, \quad x > 0$$

(3) x, y は (2) で求めたものとし, z は実数とする。次の等式を満たす z を b, c を用いて表せ。

$$A \begin{pmatrix} x & z \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2

曲線 $C: (x-2)^2 + y^2 = 1$ と直線 $l: y = (\tan \theta)x$ を考える。ただし $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。 $f(\theta)$ を次の (ア), (イ), (ウ) のように定める。

(ア) C と l の共有点の個数が 1 のとき, $f(\theta)$ は共有点と原点の距離とする。

(イ) C と l の共有点の個数が 2 以上のとき, $f(\theta)$ は共有点と原点の距離のうち最も小さいものとする。

(ウ) C と l が共有点を持たないとき, $f(\theta) = 0$ とする。

さらに, C と l が共有点を持つ θ の最大値を α とする。次の問いに答えよ。

(1) α を求めよ。

(2) C と l が共有点を持つとき, $f(\theta)$ を求めよ。

(3) 次の積分を計算せよ。

$$\int_0^{\alpha} \{f(\theta)\}^2 d\theta$$

3

a を 1 より大きい定数とする。 xy 平面上の点 $(a \cos t, \sqrt{a^2 - 1} \sin t)$ と直線 $x + y = \sqrt{3}a$ の距離を $f(t)$ とおく。 t が $0 \leq t \leq 2\pi$ の範囲を動くときの $f(t)$ の最小値を m とする。

- (1) m を a の関数として表せ。
- (2) (1) で求めた a の関数 m の最小値を求めよ。

4

ダイヤ 2 枚, ハート 2 枚, クラブ 2 枚, スペード 1 枚からなる 7 枚のトランプがある。このトランプ 7 枚をよく混ぜたのち, この 7 枚を裏のまま横 1 列に並べる事象に対して, 次のように点数を定める。

左から順にトランプをめくり, n 枚目をめくって初めてダイヤ, ハート, クラブ, スペードの 4 種類がそろったときに n 点とする。

次の問いに答えよ。

- (1) 点数が 7 点となる確率を求めよ。
- (2) 点数が 6 点となる確率を求めよ。
- (3) 点数の期待値を求めよ。