

1

(1)

[1] $x \geq 0, y \geq 0$ のとき

$$|x| + |y| < 3$$

$$\Leftrightarrow x + y < 3$$

$$\therefore y < -x + 3$$

である。

[2] $x < 0, y \geq 0$ のとき

$$|x| + |y| < 3$$

$$\Leftrightarrow -x + y < 3$$

$$\therefore y < x + 3$$

である。

[3] $x < 0, y < 0$ のとき

$$|x| + |y| < 3$$

$$\Leftrightarrow -x - y < 3$$

$$\therefore y > -x - 3$$

である。

[4] $x \geq 0, y < 0$ のとき

$$|x| + |y| < 3$$

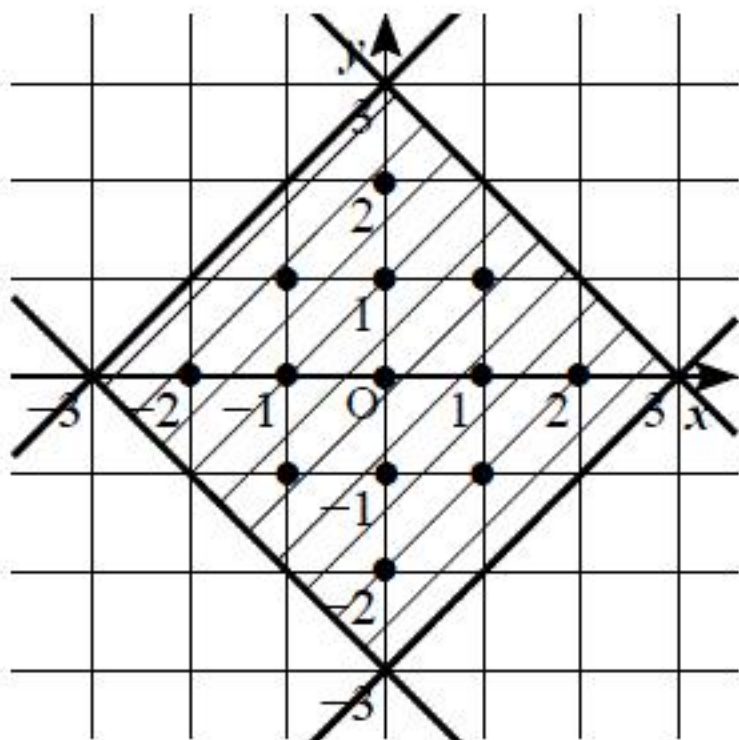
$$\Leftrightarrow x - y < 3$$

$$\therefore y > x - 3$$

である。

以上[1]～[4]より、領域 A を図示すると次図の斜線部分となる。

(ただし、境界はすべて含まない)



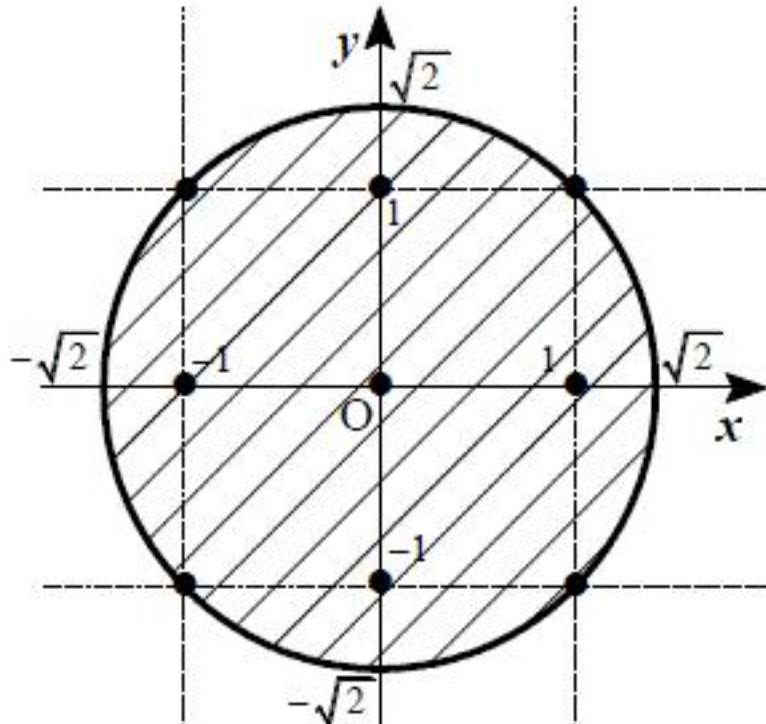
また、格子点の個数は 13 個となる。

(答) 前図, 格子点 : 13 個

(2)

領域 B を図示すると次図の斜線部分となる。

(ただし、境界はすべて含む)



また、格子点の個数は 9 個となる。

(答) 前図, 格子点 : 9 個

(3)

(1), (2) の結果より、集合 D は、

4 点 $(2, 0), (0, 2), (-2, 0), (0, -2)$

である。

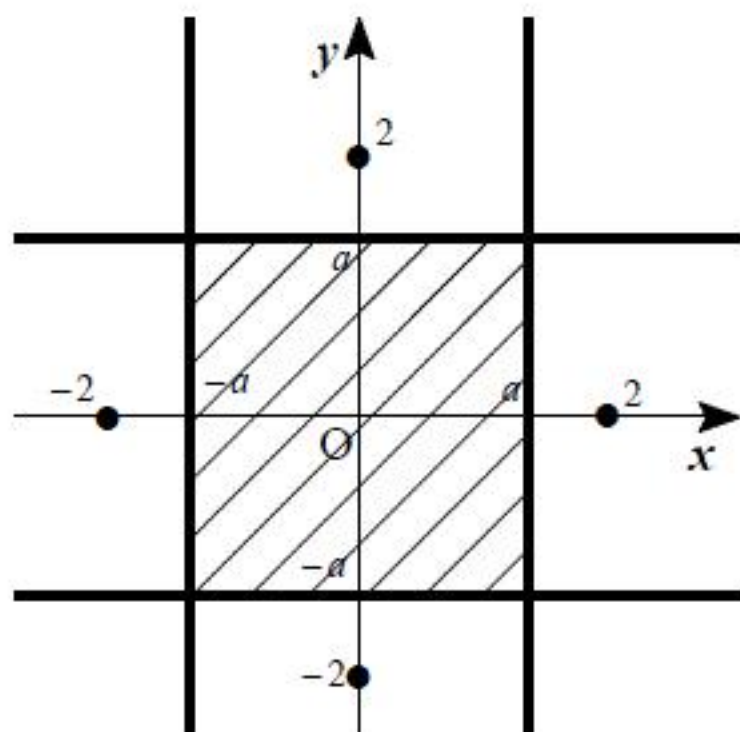
[1] $a \geq 0$ のとき

$$x^2 \leq a^2, y^2 \leq a^2$$

$$\Leftrightarrow -a \leq x \leq a, -a \leq y \leq a$$

であるから、領域 C は次図の斜線部分となる。

(ただし、境界はすべて含む)



したがって、領域 C と集合 D との共通部分が空集合となるとき、

$$(0 \leq) a < 2$$

となる。

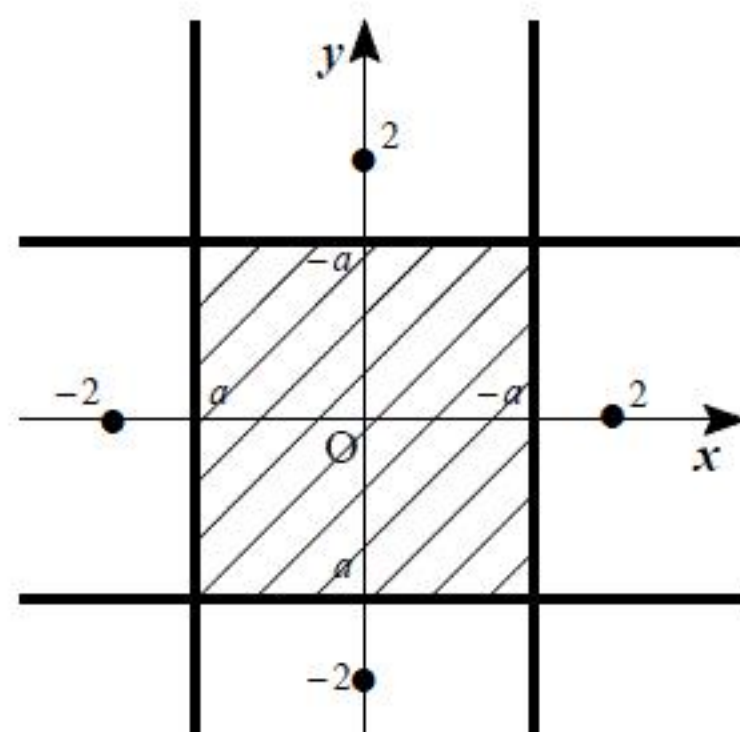
[2] $a < 0$ のとき

$$x^2 \leq a^2, y^2 \leq a^2$$

$$\Leftrightarrow a \leq x \leq -a, a \leq y \leq -a$$

であるから、領域 C は次図の斜線部分となる。

(ただし、境界はすべて含む)



したがって、領域 C と集合 D との共通部分が空集合となるとき、

$$-2 < a (< 0)$$

となる。

以上[1], [2]より、領域 C と集合 D との共通部分が空集合となる a の条件は、

$$-2 < a < 2$$

となる。

(答) $-2 < a < 2$

2

(1)

題意より、

$$\begin{cases} y_1 = x_1^2 \\ y_2 = x_2^2 \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

であるから、

$$\begin{aligned} r^2 &= \mathbf{P_1P_2}^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ &= a^2 + (x_1^2 - x_2^2)^2 \\ &= a^2 + \{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)\}^2 \\ &= a^2 + (ab)^2 \\ &= a^2(b^2 + 1) \end{aligned}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad r^2 = a^2(b^2 + 1)$$

(2)

Cは線分 $\mathbf{P_1P_2}$ の中点だから、Cのy座標 t は、 $\textcircled{1}$ を用いると、

$$t = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \quad \dots \textcircled{2}$$

と表せる。 $\textcircled{1}$ より、

$$a^2 = \frac{r^2}{b^2 + 1} = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$b^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \quad \dots \textcircled{4}$$

であるから、 $\textcircled{3} + \textcircled{4}$ より、

$$\textcircled{3} + \textcircled{4} \Leftrightarrow \frac{r^2}{b^2 + 1} + b^2 = 2(x_1^2 + x_2^2)$$

となるので、

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{b^2 + 1} + b^2 \right) \quad \dots \textcircled{5}$$

と求まる。 $\textcircled{5}$ を $\textcircled{2}$ に代入すると、

$$t = \frac{1}{4} \left(\frac{r^2}{b^2 + 1} + b^2 \right)$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad t = \frac{1}{4} \left(\frac{r^2}{b^2 + 1} + b^2 \right)$$

(3)

(2)の結果より、

$$t = \frac{1}{4} \left(\frac{r^2}{b^2 + 1} + b^2 \right)$$

である。したがって、 $t > 0$ である。 $b^2 + 1 > 0$ であるから、この両辺に $4(b^2 + 1)$ をかけると、

$$\begin{aligned} 4t(b^2 + 1) &= r^2 + b^2(b^2 + 1) \\ \Leftrightarrow 4tb^2 + 4t &= r^2 + b^4 + b^2 \\ \Leftrightarrow b^4 + (1 - 4t)b^2 + r^2 - 4t &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $b^2 = x$ とおくとこの式は

$$x^2 + (1 - 4t)x + r^2 - 4t = 0$$

となるので、この2次方程式が $x \geq 0$ で実数解をもつときの $t > 0$ での t の最小値を求めればよい。

$f(x) = x^2 + (1 - 4t)x + r^2 - 4t$ とおくと、

$$f(x) = \left(x + \frac{1 - 4t}{2} \right)^2 - \frac{(1 - 4t)^2}{4} + r^2 - 4t$$

となる。

[1] $\frac{1 - 4t}{2} > 0$ 、すなわち $t < \frac{1}{4}$ のとき

軸は負の位置に存在するから、 $x \geq 0$ に $f(x)$ が実数解をもつ条件は、

$$f(0) \leq 0$$

である。したがって、

$$r^2 - 4t \leq 0$$

$$t \geq \frac{r^2}{4}$$

となる。 $0 < r < 1$ より、

$$\frac{r^2}{4} \leq t < \frac{1}{4} \quad \text{かつ} \quad t > 0$$

を満たす t は存在するので、 t の最小値は

$$t = \frac{r^2}{4}$$

となる。このとき、 $f(x) = 0$ は、

$$x^2 + (1 - r^2)x = 0$$

$$x\{x + (1 - r^2)\} = 0$$

$$\therefore x = 0 \quad (x \geq 0, 0 < r < 1)$$

となるので、 $t = \frac{r^2}{4}$ のとき、 $b = 0$ である。

[2] $\frac{1 - 4t}{2} \leq 0$ 、すなわち $t \geq \frac{1}{4}$ のとき、

$0 < r < 1$ より明らかに t は $\frac{r^2}{4}$ より小さい値を取らない。したがって、考える必要が無い。

以上より、 t は $b = 0$ のとき最小値 $\frac{r^2}{4}$ をとることが示された。

(証明終)

(4)

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{4} \left(\frac{r^2}{b^2 + 1} + b^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{r^2}{b^2 + 1} + (b^2 + 1) - 1 \right\} \end{aligned}$$

である。 $\frac{r^2}{b^2 + 1} > 0$ 、 $b^2 + 1 > 0$ であるから、相加相乗平均の関係より、

$$\frac{r^2}{b^2 + 1} + (b^2 + 1) \geq 2\sqrt{\frac{r^2}{b^2 + 1} \cdot (b^2 + 1)} = 2r$$

である。上式の等号の成立条件は、

$$\frac{r^2}{b^2 + 1} = b^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow (b^2 + 1)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 + 1 = r \quad (\because b^2 + 1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow b^2 = r - 1 (\geq 0) \quad (\because r \geq 1)$$

のときである。したがって、 $r \geq 1$ のときの t の最小値は、

$$t = \frac{1}{4}(2r - 1) = \frac{1}{2}r - \frac{1}{4} \quad (b^2 = r - 1 \text{のとき})$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad t = \frac{1}{2}r - \frac{1}{4}$$

3

(1)

3の倍数の目は3と6であるから、これらのいずれかが出て基石が反時計回りに隣の頂点に移動する確率は

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

であり、3の倍数が出ないで基石がその頂点に留まる確率は

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

である。

さいころを3回投げたとき、基石が頂点A上にあるのは、

3回とも移動する or 3回とも留まる

のいずれかの事象が起こるときであるから、その確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} + \frac{8}{27} = \frac{1}{3}$$

である。

さいころを3回投げたとき、基石が頂点B上にあるのは、1回移動して2回留まるときであるから、その確率は

$${}_3C_1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$$

である。

さいころを3回投げたとき、基石が頂点C上にあるのは、2回移動して1回留まるときであるから、その確率は

$${}_3C_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

である。

$$(\text{答}) A: \frac{1}{3}, B: \frac{4}{9}, C: \frac{2}{9}$$

(2)

さいころを4回投げたあと、基石が同じ頂点上にあるのは、

3回移動して1回留まる or 4回とも留まる

のいずれかの事象が起きたときであるから、その確率は

$${}_4C_3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 4 \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{2}{3} + \frac{16}{81} = \frac{8}{27}$$

である。

さいころを4回投げたあと、基石が反時計回りに隣の頂点上にあるのは、

4回とも移動する or 1回移動して3回留まる

のいずれかの事象が起きたときであるから、その確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 + {}_4C_1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1}{81} + 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{27} = \frac{11}{27}$$

である。

さいころを4回投げたあと、基石が反時計回りに2つ隣の頂点上（時計回りに隣の頂点上）

にあるのは、2回移動して2回留まったときであるから、その確率は

$${}_4C_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{27}$$

である。

よって、さいころを n 回投げたあとさらに続けて4回投げたとき、基石が頂点Aにある確率は、

$$(A \rightarrow A) + (B \rightarrow A) + (C \rightarrow A)$$

$$= p \cdot \frac{8}{27} + q \cdot \frac{8}{27} + r \cdot \frac{11}{27}$$

$$= \frac{8}{27}p + \frac{8}{27}q + \frac{11}{27}r$$

と表せる。同様にして求めると、基石が頂点B, C上にある確率はそれぞれ

$$\frac{11}{27}p + \frac{8}{27}q + \frac{8}{27}r$$

$$\frac{8}{27}p + \frac{11}{27}q + \frac{8}{27}r$$

となる。

$$(\text{答}) A: \frac{8}{27}p + \frac{8}{27}q + \frac{11}{27}r, B: \frac{11}{27}p + \frac{8}{27}q + \frac{8}{27}r, C: \frac{8}{27}p + \frac{11}{27}q + \frac{8}{27}r$$

(3)

(2)で得られた3式を見比べると、ある時点において基石が頂点A上にある確率が最も高いとき（つまり $p > q$ かつ $p > r$ のとき）、さいころをさらに4回投げたあと基石が存在する確率が最も高い頂点はBであることがわかる。なぜなら、 $p > q$ かつ $p > r$ のとき、(2)より

$$\frac{11}{27}p + \frac{8}{27}q + \frac{8}{27}r > \frac{8}{27}p + \frac{8}{27}q + \frac{11}{27}r$$

$$\frac{11}{27}p + \frac{8}{27}q + \frac{8}{27}r > \frac{8}{27}p + \frac{11}{27}q + \frac{8}{27}r$$

が成り立つからである。

同様に考えると、基石が頂点B, C上にある確率が最も高いとき、さいころをさらに4回投げたあと基石が存在する確率が最も高い頂点は、それぞれC, Aである。

以上から、基石の存在する確率の最も高い頂点は、さいころを4回投げるごとに、

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \dots$$

のように移っていくことがわかる。最初に基石があったのは頂点A上なので、基石が頂点A, B, C上にある確率が最も高くなるのはそれぞれ、さいころを投げた回数が

$$A: 4 \times 3m \text{ 回}$$

$$B: 4 \times (3m+1) \text{ 回}$$

$$C: 4 \times (3m+2) \text{ 回}$$

と表されるときである（ m は0以上の整数）。ここで、

$$100 = 4 \times 25 = 4 \times (3 \cdot 8 + 1)$$

であることから、さいころを100回投げたとき、基石が置かれている確率の最も高い頂点はBとなる。

(答) B

(1)

$$f(x) = \int_a^x (t^2 + a^2 t) dt + \int_0^a t^2 dt + ax \int_0^a dt$$

であるから、これを x で微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 + a^2 x) + 0 + a \int_0^a dt \\ &= x^2 + a^2 x + a^2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = x^2 + a^2 x + a^2$$

(2)

$$\int_a^x (g(t) + tg(a)) dt = x^2 - 2x - 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow \int_a^x g(t) dt + g(a) \int_a^x t dt = x^2 - 2x - 3$$

の両辺を、 x で微分すると、

$$g(x) + g(a)x = 2x - 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

が得られる。一方、①に $x=a$ を代入して、

$$\begin{aligned} 0 &= a^2 - 2a - 3 = (a-3)(a+1) \\ \therefore a &= 3, -1 \end{aligned}$$

となる。

[1] $a=-1$ のとき

②において、

$$g(x) + g(-1)x = 2x - 2$$

となるが、これに、 $x=-1$ を代入すれば、

$$\begin{aligned} g(-1) + g(-1) \cdot (-1) &= 2 \cdot (-1) - 2 \\ \therefore 0 &= -4 \end{aligned}$$

となり、矛盾である。

[2] $a=3$ のとき

②より、 $g(x)$ は

$$g(x) + g(3)x = 2x - 2 \quad \dots \textcircled{3}$$

をみたす。これに、 $x=3$ を代入して、

$$\begin{aligned} g(3) + g(3) \cdot 3 &= 2 \cdot 3 - 2 \\ \therefore g(3) &= 1 \end{aligned}$$

と求まるので、これを③に代入して、

$$g(x) = x - 2$$

を得、これは確かに①式をみたす。

以上、[1]、[2]より、関係式①をみたす定数 a および関数 $g(x)$ は

$$a=3, g(x)=x-2$$

である。

$$(\text{答}) \quad a=3, g(x)=x-2$$