

(1)

$$\overrightarrow{OA} = \left(\frac{t}{2} + 1, \frac{t}{2} \right), \overrightarrow{OB} = \left(t, \frac{t^2}{2} \right)$$

より,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= \left(t, \frac{t^2}{2} \right) - \left(\frac{t}{2} + 1, \frac{t}{2} \right) \\ &= \left(\frac{t}{2} - 1, \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} \right) \end{aligned}$$

である。したがって、 $\overrightarrow{AB}$ とベクトル $(1, s)$ が平行である条件は

$$\begin{aligned} \left(\frac{t}{2} - 1 \right) \cdot s - \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} \right) \cdot 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}(s+1)t - s &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 - (s+1)t + 2s &= 0 \quad \cdots \text{①} \end{aligned}$$

が満たされることである。したがって、①式を t の 2 次方程式とみたときに、実数解をもつ条件を求めればよい。①の判別式を D とすると、

$$D = (s+1)^2 - 4 \cdot 2s$$

となるので、求める条件は、

$$\begin{aligned} D &\geq 0 \\ \Leftrightarrow s^2 + 2s + 1 - 8s &\geq 0 \\ \Leftrightarrow s^2 - 6s + 1 &\geq 0 \\ \therefore s &\leq 3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2} \leq s \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad s \leq 3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2} \leq s$$

(2)

(1)より、方程式①が $t > 1$ に実数解をもつときの s の条件を求めればよい。 $f(t) = t^2 - (s+1)t + 2s$ とおくと、

$$f(t) = \left(t - \frac{s+1}{2} \right)^2 - \frac{(s+1)^2}{4} + 2s$$

となるので、軸の位置で場合分けをする。

[1] $\frac{s+1}{2} \leq 1$, すなわち $s \leq 1$ のとき、①が $t > 1$ に実数解をもつ条件は

$$f(1) < 0$$

であるから、このとき、

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 - (s+1) + 2s < 0 \\ \therefore s &< 0 \end{aligned}$$

と求まる。

[2] $\frac{s+1}{2} > 1$, すなわち $s > 1$ のとき、①が $t > 1$ に実数解をもつ条件は

$$D \geq 0$$

であるから、

$$3 - 2\sqrt{2} < 1 < 3 + 2\sqrt{2}$$

より、このときの s の条件は、

$$s \geq 3 + 2\sqrt{2}$$

と求まる。

以上、[1], [2]より、①が $t > 1$ に実数解をもつ条件は、

$$s < 0, 3 + 2\sqrt{2} \leq s$$

である。

$$(\text{答}) \quad s < 0, 3 + 2\sqrt{2} \leq s$$

(1)

ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$\begin{aligned} A^2 - (a+2)A + (2a-b)E &= O \\ \Leftrightarrow A^2 &= (a+2)A - (2a-b)E \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} A^2 - 5A + 4E &= O \\ \Leftrightarrow (a+2)A - (2a-b)E - 5A + 4E &= O \\ \Leftrightarrow (a-3)A &= (2a-b-4)E \end{aligned}$$

が得られる。ここで行列 A は単位行列 E の実数倍ではないので、

$$\begin{cases} a-3=0 \\ 2a-b-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$$

となる。

(答) $a=3, b=2$

(2)

x^n を $x^2 - 5x + 4$ で割った商を $P(x)$ 、余りを $sx + t$ (s, t を実数) とすると、

$$\begin{aligned} x^n &= (x^2 - 5x + 4)P(x) + sx + t \\ \Leftrightarrow x^n &= (x-1)(x-4)P(x) + sx + t \end{aligned}$$

とかける。この式の両辺に $x=1$ を代入すると、

$$1 = s + t \quad \cdots \textcircled{1}$$

であり、 $x=4$ を代入すると、

$$4^n = 4s + t \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。①、②より、

$$s = \frac{4^n - 1}{3}, t = \frac{-4^n + 4}{3}$$

であるから、 x^n を $x^2 - 5x + 4$ で割った余りは

$$\frac{4^n - 1}{3}x + \frac{-4^n + 4}{3}$$

となる。

(答) $\frac{4^n - 1}{3}x + \frac{-4^n + 4}{3}$

(3)

A と E が交換可能であることと、(2)の結果より、多項式 $P(x)$ に行列 A を代入したもの $P(A)$ を用いて、 A^n は

$$A^n = (A^2 - 5A + 4E)P(A) + \frac{4^n - 1}{3}A + \frac{-4^n + 4}{3}E$$

と表せる。条件より、

$$A^2 - 5A + 4E = O$$

であるから、

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{4^n - 1}{3}A + \frac{-4^n + 4}{3}E \\ &= \frac{4^n - 1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \frac{-4^n + 4}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \cdot 4^n + 1 & 4^n - 1 \\ 2 \cdot 4^n - 2 & 4^n + 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

(答) $A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \cdot 4^n + 1 & 4^n - 1 \\ 2 \cdot 4^n - 2 & 4^n + 2 \end{pmatrix}$

3

(1)

$l \perp m$ であるから、 m の傾きは -1 である。したがって、 m の方程式は、

$$y = -\left(x - \frac{t}{\sqrt{2}}\right) + \frac{t}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow y = -x + \sqrt{2}t$$

である。 C と m の方程式より y を消去すると、

$$x^2 - x = -x + \sqrt{2}t$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \sqrt{2}t$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{\sqrt{2}t}$$

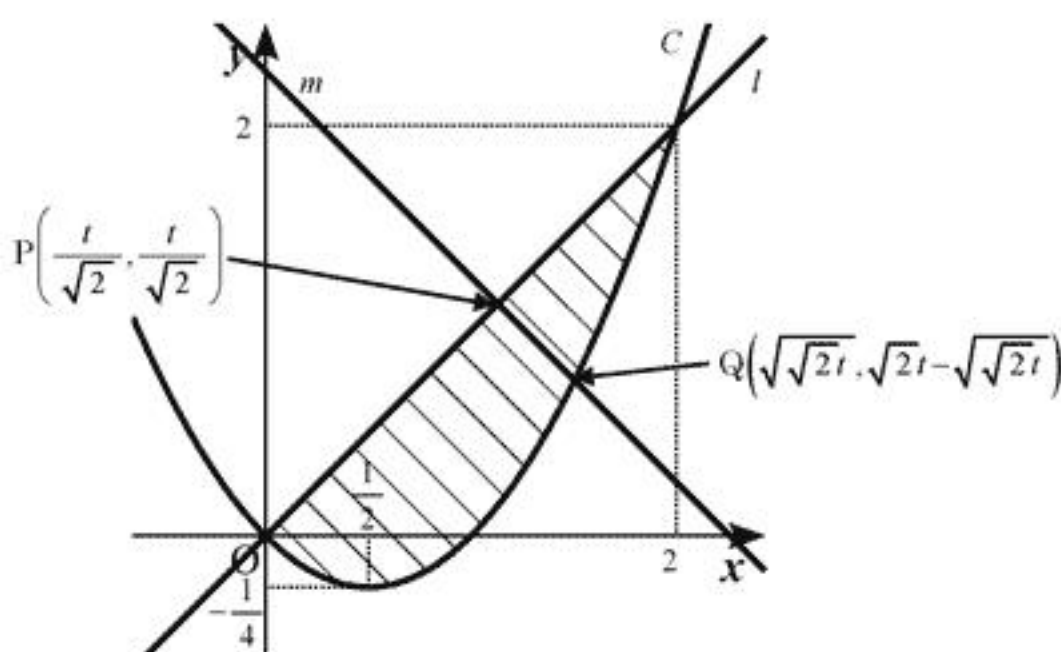
であるから、点 Q の座標は、

$$\left(\sqrt{\sqrt{2}t}, \sqrt{2}t - \sqrt{\sqrt{2}t}\right)$$

となる。

$$(\text{答}) \left(\sqrt{\sqrt{2}t}, \sqrt{2}t - \sqrt{\sqrt{2}t}\right)$$

(2)



$0 \leq t \leq 2\sqrt{2}$ のとき、

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{\left(\sqrt{\sqrt{2}t} - \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{2}t - \sqrt{\sqrt{2}t} - \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{\sqrt{2}t} - \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\sqrt{\sqrt{2}t} + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} \\ &= \sqrt{2\left(\sqrt{\sqrt{2}t} - \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} \\ &= \sqrt{2}\left(\sqrt{\sqrt{2}t} - \frac{t}{\sqrt{2}}\right) \quad (\because (Q \text{ の } x \text{ 座標}) \geq (P \text{ の } x \text{ 座標})) \\ &= \sqrt{2\sqrt{2}t} - t \end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{d}{dt}PQ = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}t}} - 1$$

である。したがって、線分 PQ の長さの増減表は次のようになる。

t	0	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	$2\sqrt{2}$
$\frac{d}{dt}PQ$		+	0	-	
PQ	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	0

増減表より、 $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき、 PQ は最大値 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ をとることが分かる。

$$(\text{答}) \text{ 最大値: } \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (t = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき})$$

(3)

求める立体の体積は、

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\sqrt{2}} \pi PQ^2 dt \\ &= \pi \int_0^{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{2\sqrt{2}t} - t\right)^2 dt \\ &= \pi \int_0^{2\sqrt{2}} \left(2^{\frac{3}{4}} t^{\frac{1}{2}} - t\right)^2 dt \\ &= \pi \int_0^{2\sqrt{2}} \left(2^{\frac{3}{2}} t - 2^{\frac{7}{4}} t^{\frac{3}{2}} + t^2\right) dt \\ &= \pi \left[2^{\frac{1}{2}} t^2 - \frac{2^{\frac{11}{4}}}{5} t^{\frac{5}{2}} + \frac{t^3}{3} \right]_0^{2\sqrt{2}} \\ &= \pi \left(2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^3 - \frac{2^{\frac{11}{4}}}{5} \cdot 2^{\frac{15}{4}} + \frac{2^{\frac{9}{2}}}{3} \right) \\ &= \pi \left(8\sqrt{2} - \frac{64\sqrt{2}}{5} + \frac{16\sqrt{2}}{3} \right) \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{15} \pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{8\sqrt{2}}{15} \pi$$

(1)

$$\begin{aligned}
I_{n+1} + I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2(n+1)} x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x (\tan^2 x + 1) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x \cdot (\tan x)' dx \\
&= \left[\frac{1}{2n+1} \tan^{2n+1} x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{2n+1}
\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1}$$

(2)

(1)の結果より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (I_{n+1} + I_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$$

である。ここで、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ において $\tan x \geq 0$ であるから、 $n=1, 2, 3, \dots$ について

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x dx \geq 0$$

が成り立つ。したがって

$$I_{n+1} + I_n \geq I_n \geq 0$$

であり、はさみうちの定理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$$

であることが言える。

(証明終)

(3)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (I_{n+1} + I_n) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (-1)^n (I_{n+1} + I_n) + \dots + (I_3 + I_2) - (I_2 + I_1) \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (-1)^n I_{n+1} - I_1 \right\} \\
&= -I_1
\end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\
&= [\tan x - x]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= 1 - \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

であるから、

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = -1 + \frac{\pi}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = -1 + \frac{\pi}{4}$$