

(1)

$$\overrightarrow{OA} = \left(\frac{t}{2} + 1, \frac{t}{2} \right), \overrightarrow{OB} = \left(t, \frac{t^2}{2} \right)$$

より,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= \left(t, \frac{t^2}{2} \right) - \left(\frac{t}{2} + 1, \frac{t}{2} \right) \\ &= \left(\frac{t}{2} - 1, \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} \right) \end{aligned}$$

である。したがって、 $\overrightarrow{AB}$ とベクトル $(1, s)$ が平行である条件は

$$\begin{aligned} \left(\frac{t}{2} - 1 \right) \cdot s - \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} \right) \cdot 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}(s+1)t - s &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 - (s+1)t + 2s &= 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が満たされることである。したがって、①式を t の 2 次方程式とみたときに、実数解をもつ条件を求めればよい。①の判別式を D とすると、

$$D = (s+1)^2 - 4 \cdot 2s$$

となるので、求める条件は、

$$\begin{aligned} D &\geq 0 \\ \Leftrightarrow s^2 + 2s + 1 - 8s &\geq 0 \\ \Leftrightarrow s^2 - 6s + 1 &\geq 0 \\ \therefore s &\leq 3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2} \leq s \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad s \leq 3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2} \leq s$$

(2)

(1)より、方程式①が $t > 1$ に実数解をもつときの s の条件を求めればよい。 $f(t) = t^2 - (s+1)t + 2s$ とおくと、

$$f(t) = \left(t - \frac{s+1}{2} \right)^2 - \frac{(s+1)^2}{4} + 2s$$

となるので、軸の位置で場合分けをする。

$$[1] \quad \frac{s+1}{2} \leq 1, \text{ すなわち } s \leq 1 \text{ のとき,}$$

①が $t > 1$ に実数解をもつ条件は

$$f(1) < 0$$

であるから、このとき、

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 - (s+1) + 2s < 0 \\ \therefore s &< 0 \end{aligned}$$

と求まる。

$$[2] \quad \frac{s+1}{2} > 1, \text{ すなわち } s > 1 \text{ のとき,}$$

①が $t > 1$ に実数解をもつ条件は

$$D \geq 0$$

であるから、

$$3 - 2\sqrt{2} < 1 < 3 + 2\sqrt{2}$$

より、このときの s の条件は、

$$s \geq 3 + 2\sqrt{2}$$

と求まる。

以上、[1], [2]より、①が $t > 1$ に実数解をもつ条件は、

$$s < 0, 3 + 2\sqrt{2} \leq s$$

である。

$$(\text{答}) \quad s < 0, 3 + 2\sqrt{2} \leq s$$

(1)

ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$\begin{aligned} A^2 - (a+2)A + (2a-b)E &= O \\ \Leftrightarrow A^2 &= (a+2)A - (2a-b)E \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} A^2 - 5A + 4E &= O \\ \Leftrightarrow (a+2)A - (2a-b)E - 5A + 4E &= O \\ \Leftrightarrow (a-3)A &= (2a-b-4)E \end{aligned}$$

が得られる。ここで行列 A は単位行列 E の実数倍ではないので、

$$\begin{cases} a-3=0 \\ 2a-b-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$$

となる。

(答) $a=3, b=2$

(2)

x^n を x^2-5x+4 で割った商を $P(x)$ 、余りを $sx+t$ (s, t を実数) とすると、

$$\begin{aligned} x^n &= (x^2-5x+4)P(x) + sx + t \\ \Leftrightarrow x^n &= (x-1)(x-4)P(x) + sx + t \end{aligned}$$

とかける。この式の両辺に $x=1$ を代入すると、

$$1 = s + t \quad \cdots \textcircled{1}$$

であり、 $x=4$ を代入すると、

$$4^n = 4s + t \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。①、②より、

$$s = \frac{4^n - 1}{3}, t = \frac{-4^n + 4}{3}$$

であるから、 x^n を x^2-5x+4 で割った余りは

$$\frac{4^n - 1}{3}x + \frac{-4^n + 4}{3}$$

となる。

(答) $\frac{4^n - 1}{3}x + \frac{-4^n + 4}{3}$

(3)

A と E が交換可能であることと、(2)の結果より、多項式 $P(x)$ に行列 A を代入したもの $P(A)$ を用いて、 A^n は

$$A^n = (A^2 - 5A + 4E)P(A) + \frac{4^n - 1}{3}A + \frac{-4^n + 4}{3}E$$

と表せる。条件より、

$$A^2 - 5A + 4E = O$$

であるから、

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{4^n - 1}{3}A + \frac{-4^n + 4}{3}E \\ &= \frac{4^n - 1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \frac{-4^n + 4}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \cdot 4^n + 1 & 4^n - 1 \\ 2 \cdot 4^n - 2 & 4^n + 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

(答) $A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \cdot 4^n + 1 & 4^n - 1 \\ 2 \cdot 4^n - 2 & 4^n + 2 \end{pmatrix}$

(1)

$g(x) = ax + x \log x$ ($0 < x \leq 1$) とすると

$$g'(x) = a + 1 + \log x$$

となる。

ここで $g'\left(\frac{1}{e^{a+1}}\right) = 0$ であり, $a > 0$ から $0 < \frac{1}{e^{a+1}} < 1$ である。

よって, 増減表は以下のようになる。

x	0		$\frac{1}{e^{a+1}}$		1
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

また $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ より,

$$\lim_{x \rightarrow +0} g(x) = 0$$

であり, $g(1) = a$ であるので, $g(x)$ は $x: 0 \rightarrow 1$ で負から正へ符号を一度だけ変える。

ここで, $g\left(\frac{1}{e^a}\right) = 0$ であることから,

$$\begin{aligned} f(a) &= \lim_{t \rightarrow +0} \int_t^1 |ax + x \log x| dx \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \left(\int_{\frac{1}{e^a}}^1 (ax + x \log x) dx - \int_t^{\frac{1}{e^a}} (ax + x \log x) dx \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \left(\left[\frac{a}{2} x^2 + \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} \right]_{\frac{1}{e^a}}^1 - \left[\frac{a}{2} x^2 + \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} \right]_t^{\frac{1}{e^a}} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2e^{2a}} + \frac{a}{2} t^2 + \frac{t^2}{2} \log t - \frac{t^2}{4} \right) \end{aligned}$$

となり, $\lim_{t \rightarrow +0} t^2 \log t = 0$ なので

$$f(a) = \frac{a}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2e^{2a}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(a) = \frac{a}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2e^{2a}}$$

(2)

$$f'(a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{e^{2a}}$$

であるので, 増減表は以下のようになる。

a	0		$\frac{\log 2}{2}$	
$f'(a)$		-	0	+
$f(a)$		$\searrow$		$\nearrow$

よって, $a = \frac{\log 2}{2}$ のとき, 最小値 $\frac{\log 2}{4}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{\log 2}{2} \text{ のとき, 最小値 } \frac{\log 2}{4}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= -ae^{-ax} \sin(\sqrt{3}ax) + \sqrt{3}ae^{-ax} \cos(\sqrt{3}ax) \\
 &= ae^{-ax} \left\{ \sqrt{3} \cos(\sqrt{3}ax) - \sin(\sqrt{3}ax) \right\} \\
 f''(x) &= -a^2e^{-ax} \left(\sqrt{3} \cos(\sqrt{3}ax) - \sin(\sqrt{3}ax) \right) \\
 &\quad + ae^{-ax} \left(-3a \sin(\sqrt{3}ax) - \sqrt{3}a \cos(\sqrt{3}ax) \right) \\
 &= -2a^2e^{-ax} \left\{ \sin(\sqrt{3}ax) + \sqrt{3} \cos(\sqrt{3}ax) \right\}
 \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
 f''(x) + f'(x) + f(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow e^{-ax} \left\{ (1-a-2a^2) \sin(\sqrt{3}ax) + \sqrt{3}(a-2a^2) \cos(\sqrt{3}ax) \right\} &= 0 \quad \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

①に $x=0$ を代入すると

$$\sqrt{3}(a-2a^2)=0 \Leftrightarrow a=0, \frac{1}{2}$$

となるが $a>0$ なので $a=\frac{1}{2}$ となる。①に $a=\frac{1}{2}$ を代入すると

$$1-a-2a^2=0, a-2a^2=0$$

より、たしかに x によらず①をみたす。よって $a=\frac{1}{2}$ である。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{1}{2}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= ae^{-ax} \left\{ \sqrt{3} \cos(\sqrt{3}ax) - \sin(\sqrt{3}ax) \right\} \\
 &= 2ae^{-ax} \sin\left(\sqrt{3}ax + \frac{2}{3}\pi\right) \\
 &= e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{2}{3}\pi\right)
 \end{aligned}$$

であり、 $e^{-\frac{x}{2}}>0$ であるので、 $f'(x)$ の正負は $\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{2}{3}\pi\right)$ で決まる。極大となる x を考えるので、 $\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{2}{3}\pi\right)$ が正から負になるときを考えれば良い。

よって

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x_n + \frac{2}{3}\pi = (2n-1)\pi \Leftrightarrow x_n = \frac{2\sqrt{3}}{9}(6n-5)\pi$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x_n = \frac{2\sqrt{3}}{9}(6n-5)\pi$$

(3)

$$\begin{aligned}
 f(x_n) &= e^{-\frac{x_n}{2}} \sin\left(2n\pi - \frac{5}{3}\pi\right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{x_n}{2}} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{\sqrt{3}}{9}x} \cdot \left(e^{-\frac{2\sqrt{3}}{3}x}\right)^{n-1}
 \end{aligned}$$

であるので、 $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ は

$$\text{初項 } \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{\sqrt{3}}{9}x}, \text{ 公比 } e^{-\frac{2\sqrt{3}}{3}x}$$

の無限等比級数である。したがって、 $0 < e^{-\frac{2\sqrt{3}}{3}x} < 1$ に注意すれば、これは収束し、

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{\sqrt{3}}{9}x} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\frac{2\sqrt{3}}{3}x}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{9}x}}{1 - e^{-\frac{2\sqrt{3}}{3}x}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{9}x}}{1 - e^{-\frac{2\sqrt{3}}{3}x}}$$