

数 学

(理 学 部 数 学 科)

(平 成 2 4 年 度)

問題冊子 1～4ページ 答案用紙 4枚

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけない。
2. 配布された用紙に、枚数の不足や印刷不鮮明な箇所がある場合には申し出ること。
3. 受験番号は、答案用紙1枚ごとに所定の欄2箇所に必ず記入すること。記入を忘れたり、誤った番号を記入したときは採点されないことがある。
4. 解答は必ず答案用紙の指定された箇所へ記入すること。やむをえず裏面にまで解答が及ぶ場合には、その旨を明記し、かつ、受験番号等を記入する部分(上部、右部分)の裏には記入しないこと。
5. 試験が終了したら、4枚の答案用紙を上から(その1)、(その2)、(その3)、(その4)の順になるように机上におくこと。
6. 退場するときは、問題冊子を持ち帰ること。

1

実数 t に対し, xy 平面において 2 つの位置ベクトル

$$\overrightarrow{OA} = \left(\frac{t}{2} + 1, \frac{t}{2} \right), \quad \overrightarrow{OB} = \left(t, \frac{t^2}{2} \right)$$

を考える。

- (1) 次の条件を満たす t が存在する実数 s の範囲を求めよ。

「ベクトル $\overrightarrow{AB}$ は, ベクトル $(1, s)$ に平行である。」

- (2) 次の条件を満たす t が存在する実数 s の範囲を求めよ。

「ベクトル $\overrightarrow{AB}$ は, ベクトル $(1, s)$ に平行であり, かつ $t > 1$ である。」

2

行列 A を $\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}$ とし, E, O をそれぞれ 2 次の単位行列, 零行列とする。

- (1) $A^2 - 5A + 4E = O$ を満たす実数 a, b を求めよ。
- (2) n を 2 以上の自然数とする。 x^n を $x^2 - 5x + 4$ で割った余りを求めよ。
- (3) a, b を (1) で求めた実数とする。2 以上の自然数 n に対して, A^n を求めよ。

3

xy 平面上に曲線 $C: y = x^2 - x$ と直線 $l: y = x$ がある。

- (1) l 上の点 $P\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$ ($0 \leq t \leq 2\sqrt{2}$) を通り、 l と垂直な直線を m とする。 m と C との共有点のうち、 x 座標が 0 以上のものを Q とする。 Q の座標を求めよ。
- (2) $0 \leq t \leq 2\sqrt{2}$ のとき、線分 PQ の長さの最大値とそのときの t を求めよ。
- (3) C と l で囲まれた部分を l を軸として 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

4

$n = 1, 2, 3, \dots$ に対し,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x \, dx$$

とおく。

- (1) $I_n + I_{n+1}$ を計算せよ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ を示せ。
- (3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ を求めよ。