

1

(1)

$$64^{95} = (2^{19})^{30}, 65^{90} = (65^3)^{30}$$

より、 2^{19} と 65^3 の大小を比較すればよい。

$$\begin{aligned} 2^{19} - 65^3 &= 2^{19} - (2^6 + 1)^3 \\ &= 2^{19} - (2^{18} + 3 \cdot 2^{12} + 3 \cdot 2^6 + 1) \\ &> 2^{18} - (2^2 \cdot 2^{12} + 2^2 \cdot 2^6 + 1) \\ &= 2^{18} - (2^{14} + 2^8 + 1) \\ &> 2^{18} - 3 \cdot 2^{16} \\ &= 2^{16} > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore 2^{19} > 65^3$$

であるから、 $64^{95} > 65^{90}$ となる。

(答) $64^{95} > 65^{90}$

(2)

$$63^{100} = (63^{10})^{10}, 64^{95} = (2^{57})^{10}$$

より、 63^{10} と 2^{57} の大小を比較すればよい。

$$\begin{aligned} 63^{10} &= \{(2^6 - 1)^2\}^5 \\ &= (2^{12} - 2 \cdot 2^6 + 1)^5 \\ &> (2^{12} - 2^7)^5 \\ &= 2^{35} (2^5 - 1)^5 \end{aligned}$$

であり、ここで、

$$\begin{aligned} (2^5 - 1)^5 &= 2^{25} - 5 \cdot 2^{20} + 10 \cdot 2^{15} - 10 \cdot 2^{10} + 5 \cdot 2^5 - 1 \\ &> 2^{25} - 2^3 \cdot 2^{20} - 2^4 \cdot 2^{10} - 1 \\ &> 2^{25} - 2^{23} - 2^{23} - 2^{23} \\ &= 2^{23} \end{aligned}$$

となるから、

$$63^{10} > 2^{35} (2^5 - 1)^5 > 2^{35} \cdot 2^{23} = 2^{58} > 2^{57}$$

となることがわかる。したがって、 $63^{100} > 64^{95}$ である。

(答) $63^{100} > 64^{95}$

2

(1)

(i)

$$\begin{aligned}
 \alpha_{n+1} + \sqrt{6}\beta_{n+1} &= (5+2\sqrt{6})^{n+1} \\
 &= (5+2\sqrt{6})(\alpha_n + \sqrt{6}\beta_n) \\
 &= (5\alpha_n + 12\beta_n) + \sqrt{6}(2\alpha_n + 5\beta_n)
 \end{aligned}$$

より,

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = 5\alpha_n + 12\beta_n \\ \beta_{n+1} = 2\alpha_n + 5\beta_n \end{cases}$$

である。したがって,

$$\begin{aligned}
 \gamma_{n+1} &= \alpha_{n+1} - \sqrt{6}\beta_{n+1} \\
 &= (5-2\sqrt{6})(\alpha_n - \sqrt{6}\beta_n) \\
 &= (5-2\sqrt{6})\gamma_n
 \end{aligned}$$

である。よって, 数列 $\{\gamma_n\}$ は, 初項 $\gamma_1 = \alpha_1 - \sqrt{6}\beta_1 = 5-2\sqrt{6}$, 公比 $5-2\sqrt{6}$ の等比数列である。
したがって,

$$\gamma_n = (5-2\sqrt{6})^n$$

である。

$$(\text{答}) \quad \gamma_n = (5-2\sqrt{6})^n$$

(ii)

$$\begin{cases} \alpha_n + \sqrt{6}\beta_n = (5+2\sqrt{6})^n \\ \alpha_n - \sqrt{6}\beta_n = (5-2\sqrt{6})^n \end{cases}$$

より,

$$\alpha_n = \frac{1}{2} \left\{ (5+2\sqrt{6})^n + (5-2\sqrt{6})^n \right\}, \beta_n = \frac{\sqrt{6}}{12} \left\{ (5+2\sqrt{6})^n - (5-2\sqrt{6})^n \right\}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \alpha_n = \frac{1}{2} \left\{ (5+2\sqrt{6})^n + (5-2\sqrt{6})^n \right\}, \beta_n = \frac{\sqrt{6}}{12} \left\{ (5+2\sqrt{6})^n - (5-2\sqrt{6})^n \right\}$$

(2)

(i)

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^3 = 11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}$$

より,

$$a_3 = 0, b_3 = 11, c_3 = 9, d_3 = 0$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_3 = 0, b_3 = 11, c_3 = 9, d_3 = 0$$

(ii)

[1] n が奇数のとき自然数 k を用いて $n = 2k-1$ とおくと,

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{2} + \sqrt{3})^n &= (\sqrt{2} + \sqrt{3})^{2k-1} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})^{2k} \\
 &= (\sqrt{3} - \sqrt{2})(5+2\sqrt{6})^k \\
 &= (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\alpha_k + \sqrt{6}\beta_k) \\
 &= \sqrt{2}(-\alpha_k + 3\beta_k) + \sqrt{3}(\alpha_k - 2\beta_k) \\
 &= \sqrt{2}\left(-\alpha_{\frac{n+1}{2}} + 3\beta_{\frac{n+1}{2}}\right) + \sqrt{3}\left(\alpha_{\frac{n+1}{2}} - 2\beta_{\frac{n+1}{2}}\right)
 \end{aligned}$$

だから,

$$a_n = 0, b_n = -\alpha_{\frac{n+1}{2}} + 3\beta_{\frac{n+1}{2}}, c_n = \alpha_{\frac{n+1}{2}} - 2\beta_{\frac{n+1}{2}}, d_n = 0$$

である。

[2] n が偶数のとき自然数 k を用いて $n = 2k$ とおくと,

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{2} + \sqrt{3})^n &= (\sqrt{2} + \sqrt{3})^{2k} \\
 &= (5+2\sqrt{6})^k \\
 &= \alpha_k + \sqrt{6}\beta_k \\
 &= \alpha_{\frac{n}{2}} + \sqrt{6}\beta_{\frac{n}{2}}
 \end{aligned}$$

だから,

$$a_n = \alpha_{\frac{n}{2}}, b_n = 0, c_n = 0, d_n = \beta_{\frac{n}{2}}$$

である。

以上[1], [2]より, 求める一般項は,

$$n \text{ が奇数のとき, } a_n = 0, b_n = -\alpha_{\frac{n+1}{2}} + 3\beta_{\frac{n+1}{2}}, c_n = \alpha_{\frac{n+1}{2}} - 2\beta_{\frac{n+1}{2}}, d_n = 0$$

$$n \text{ が偶数のとき, } a_n = \alpha_{\frac{n}{2}}, b_n = 0, c_n = 0, d_n = \beta_{\frac{n}{2}}$$

である。

$$(\text{答}) \quad n \text{ が奇数のとき, } a_n = 0, b_n = -\alpha_{\frac{n+1}{2}} + 3\beta_{\frac{n+1}{2}}, c_n = \alpha_{\frac{n+1}{2}} - 2\beta_{\frac{n+1}{2}}, d_n = 0$$

$$n \text{ が偶数のとき, } a_n = \alpha_{\frac{n}{2}}, b_n = 0, c_n = 0, d_n = \beta_{\frac{n}{2}}$$

3

(1)

直角三角形 ADM において三平方の定理より

$$AM = \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{AD}{AM} \\ &= \frac{k}{\sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}} \\ &= \frac{2k}{\sqrt{4k^2 + 1}}, \\ \cos \alpha &= \frac{MD}{AM} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4k^2 + 1}}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sin \alpha = \frac{2k}{\sqrt{4k^2 + 1}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{4k^2 + 1}}$$

(2)

$\triangle ADM \equiv \triangle AEM$ より,

$$\begin{aligned}\angle EMA &= \angle DMA \\ &= \alpha\end{aligned}$$

である。したがって、直角三角形 EMF において

$$\angle EMF = 180^\circ - 2\alpha$$

となる。よって

$$\begin{aligned}MF &= ME \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha) \\ &= \frac{1}{2}(2\sin^2 \alpha - 1) \\ &= \sin^2 \alpha - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}CF &= MC - MF \\ &= \frac{1}{2} - \left(\sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \right) \\ &= 1 - \sin^2 \alpha \\ &= \cos^2 \alpha \\ &= \frac{1}{4k^2 + 1}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad CF = \frac{1}{4k^2 + 1}$$

(3)

$\triangle BCE$ の面積を S_1 とすると,

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{1}{2} \cdot CB \cdot CF \\ &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot \frac{1}{4k^2 + 1} \\ &= \frac{k}{2(4k^2 + 1)}\end{aligned}$$

となる。また $\triangle AEG$ の面積を S_2 , $\triangle ADE$ の面積を S_3 とすると

$$\begin{aligned}S_2 &= \frac{S_3}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(1 - \frac{1}{4k^2 + 1} \right) \\ &= \frac{k^3}{4k^2 + 1}\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}2S_2 &= S_1 \\ \Leftrightarrow \frac{2k^3}{4k^2 + 1} &= \frac{k}{2(4k^2 + 1)} \\ \Leftrightarrow k^2 &= \frac{1}{4} \\ \therefore k &= \frac{1}{2} \quad (\because 0 < k < 1)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad k = \frac{1}{2}$$

(1)

G 上の点を $P(a, t, 2-a^2-t^2)$ とおく。ただし、 $-\sqrt{2-a^2} \leq t \leq \sqrt{2-a^2}$ である。また、 $A(a, 0, 0)$ と定める。このとき、

$$\begin{aligned} AP^2 &= t^2 + (2-a^2-t^2)^2 \\ &= t^4 + (2a^2-3)t^2 + (a^2-2)^2 \\ &= \left\{ t^2 - \left(\frac{3}{2} - a^2 \right) \right\}^2 + (a^2-2)^2 - \left(\frac{3}{2} - a^2 \right)^2 \end{aligned}$$

となる。ここで $s = t^2$ とおくと、 $0 \leq s \leq 2-a^2$ であり、

$$AP^2 = \left\{ s - \left(\frac{3}{2} - a^2 \right) \right\}^2 + (a^2-2)^2 - \left(\frac{3}{2} - a^2 \right)^2$$

となる。したがって、 $0 \leq a \leq \sqrt{2}$ のもとで、

$$[1] \quad \frac{3}{2} - a^2 \geq \frac{1}{2}(2-a^2) \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 1 \text{ のとき}$$

AP^2 は $s=0$ のとき、最大値 $(2-a^2)^2$ をとる。

$$[2] \quad \frac{3}{2} - a^2 < \frac{1}{2}(2-a^2) \Leftrightarrow 1 < a \leq \sqrt{2} \text{ のとき}$$

AP^2 は $s=2-a^2$ のとき、最大値 $2-a^2$ をとる。

以上[1], [2]より

$$r(a) = \begin{cases} 2-a^2 & (0 \leq a \leq 1 \text{ のとき}) \\ \sqrt{2-a^2} & (1 < a \leq \sqrt{2} \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad r(a) = \begin{cases} 2-a^2 & (0 \leq a \leq 1 \text{ のとき}) \\ \sqrt{2-a^2} & (1 < a \leq \sqrt{2} \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2)

(1)の結果より

$$\begin{aligned} \pi \int_1^{\sqrt{2}} (r(x))^2 dx &= \pi \int_1^{\sqrt{2}} (2-x^2) dx \\ &= \pi \left[2x - \frac{x^3}{3} \right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{4\sqrt{2}-5}{3} \pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{4\sqrt{2}-5}{3} \pi$$