

(1)

$$\begin{aligned} B &= A - pE \\ &= \begin{pmatrix} -p & a^2 \\ -b^2 & 2ab - p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より,

$$B^2 = \begin{pmatrix} p^2 - a^2b^2 & 2a^3b - 2a^2p \\ 2b^3p - 2ab^3 & (2ab - p)^2 - a^2b^2 \end{pmatrix}$$

となる。 $B^2 = O$ であるから, $p = ab$ である。(答) $p = ab$

(2)

 $B^2 = O$ であるから, 二項定理により,

$$\begin{aligned} A^n &= (B + pE)^n \\ &= \sum_{k=0}^n {}_nC_k \cdot B^k \cdot (pE)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^1 {}_nC_k \cdot B^k \cdot (pE)^{n-k} \\ &= p^n E + np^{n-1} B \end{aligned}$$

である。したがって,

$$\begin{cases} s = p^n = a^n b^n \\ t = np^{n-1} = na^{n-1} b^{n-1} \end{cases}$$

である。

(答) $\begin{cases} s = a^n b^n \\ t = na^{n-1} b^{n-1} \end{cases}$

(3)

$$\begin{aligned} A^n \begin{pmatrix} a \\ r \end{pmatrix} &= q \begin{pmatrix} a \\ r \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow (A^n - qE) \begin{pmatrix} a \\ r \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であり, a が 0 でない実数であるから $A^n - qE$ の行列式が 0 となる。

$$\begin{aligned} A^n - qE &= np^{n-1}B + p^nE - qE \\ &= np^{n-1}(A - pE) + p^nE - qE \\ &= np^{n-1}A + (-np^n + p^n - q)E \end{aligned}$$

である。ここで, $\alpha = -np^n + p^n - q$ とおく。すると,

$$A^n - qE = \begin{pmatrix} \alpha & na^2p^{n-1} \\ -nb^2p^{n-1} & 2nabp^{n-1} + \alpha \end{pmatrix}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \alpha(2nabp^{n-1} + \alpha) + n^2a^2b^2p^{2n-2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha^2 + 2np^n\alpha + n^2p^{2n} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\alpha + np^n)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha &= -np^n \end{aligned}$$

である。これを $\alpha = -np^n + p^n - q$ に代入して,

$$q = p^n = a^n b^n$$

を得る。これを $(A^n - qE) \begin{pmatrix} a \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に代入すると,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -p & a^2 \\ -b^2 & 2ab - p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ r \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \therefore r &= b \end{aligned}$$

である。

(答) $\begin{cases} q = a^n b^n \\ r = b \end{cases}$

(1)

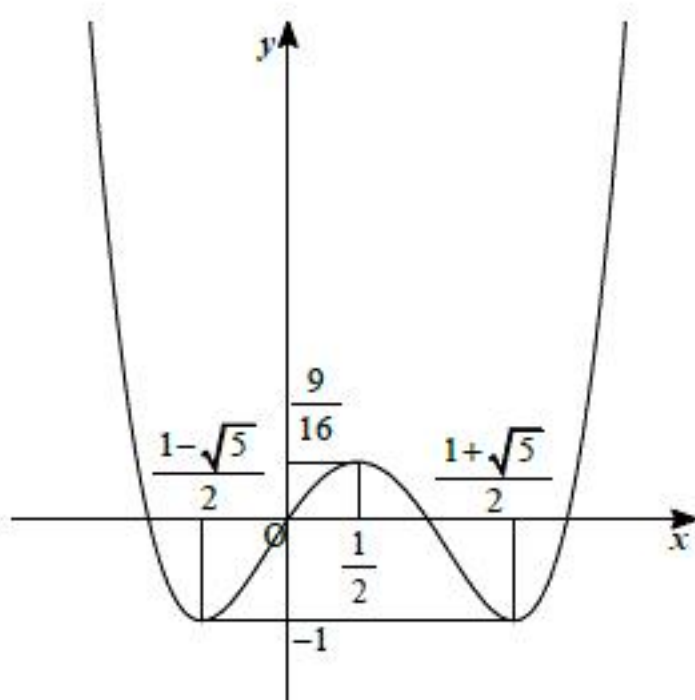
$$y = (x^2 - x - 1)^2 - 1 \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} y' &= 2(x^2 - x - 1)(2x - 1) \\ &= 2\left(x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)(2x - 1) \end{aligned}$$

であるから、増減表は下のようになる。

x	...	$\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$	...	$\frac{1}{2}$	...	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	...
y'	-	0	+	0	-	0	+
y	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{9}{16}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

したがって、曲線 C の概形は下図のようになる。



上図より、曲線 C と直線 l_a の共有点の個数は、

$a < -1$ のとき 0 個

$a = -1, \frac{9}{16} < a$ のとき 2 個

$a = \frac{9}{16}$ のとき 3 個

$-1 < a < \frac{9}{16}$ のとき 4 個

である。

(答) $a < -1$ のとき 0 個, $a = -1, \frac{9}{16} < a$ のとき 2 個, $a = \frac{9}{16}$ のとき 3 個, $-1 < a < \frac{9}{16}$ のとき 4 個

(2)

$$\begin{aligned} (x^2 - x - 1)^2 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \{(x^2 - x - 1) + 1\} \{(x^2 - x - 1) - 1\} &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x - 1)(x - 2)(x + 1) &= 0 \\ \therefore x &= -1, 0, 1, 2 \end{aligned}$$

より、曲線 C と x 軸との交点の x 座標は、 $x = -1, 0, 1, 2$ であるから、曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積の和は、

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^0 \{-(x^2 - x - 1)^2 + 1\} dx + \int_0^1 \{(x^2 - x - 1)^2 - 1\} dx + \int_1^2 \{-(x^2 - x - 1)^2 + 1\} dx \\ &= -\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_0^1 - \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_1^2 \\ &= \frac{49}{30} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{49}{30}$

(1)

$$\ell_1: y = \frac{e^a}{a}x, \ell_2: y = \frac{e^b}{b-1}(x-1)$$

となり、また与えられた条件より、

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= f(a) \\ \Leftrightarrow [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^1 &= ae^{-a} \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{e} &= ae^{-a} \\ \therefore \frac{e^a}{a} &= \frac{e}{e-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1) - f(0) &= f'(b) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{e} &= (1-b)e^{-b} \\ \therefore \frac{e^b}{b-1} &= -e \end{aligned}$$

であるので、

$$\ell_1: y = \frac{e}{e-2}x, \ell_2: y = -ex + e$$

となる。

$$(\text{答}) \ell_1: y = \frac{e}{e-2}x, \ell_2: y = -ex + e$$

(2)

$$\begin{cases} y = \frac{e}{e-2}x \\ y = -ex + e \end{cases}$$

$$\therefore x = \frac{e-2}{e-1}, y = \frac{e}{e-1}$$

より、 ℓ_1 と ℓ_2 の交点は点 $\left(\frac{e-2}{e-1}, \frac{e}{e-1}\right)$ である。

また、曲線 $y = e^x$ 上の点 $(1, e)$ における、 $y = e^x$ の接線の方程式は、 $y = ex$ となる。

$$\begin{cases} y = ex \\ y = -ex + e \end{cases}$$

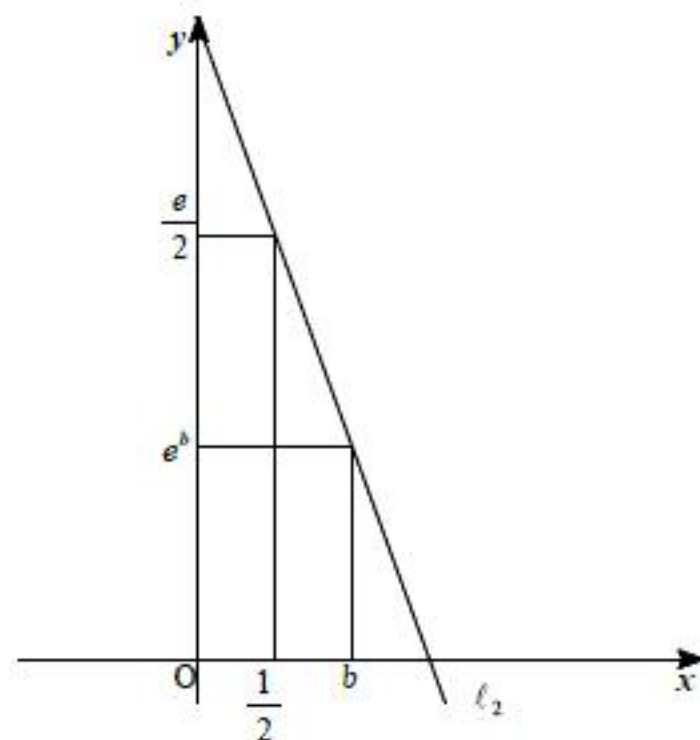
$$\therefore x = \frac{1}{2}, y = \frac{e}{2}$$

より、この接線と ℓ_2 の交点は、点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{e}{2}\right)$ である。

$$(\text{答}) \text{ 順に点 } \left(\frac{e-2}{e-1}, \frac{e}{e-1}\right), \text{ 点 } \left(\frac{1}{2}, \frac{e}{2}\right)$$

(3)

[1] $b < \frac{1}{2}$ を示す。



$b \geq \frac{1}{2}$ と仮定すると、 ℓ_2 は上図のようになるから、

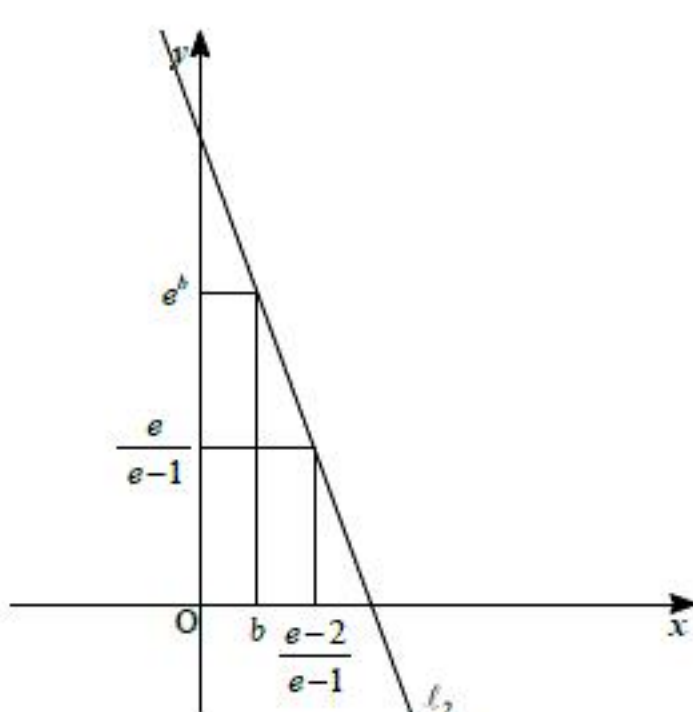
$$e^b \leq \frac{e}{2} < \frac{3}{2} = 1.5 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、 $b \geq \frac{1}{2}$ より、

$$e^b \geq e^{\frac{1}{2}} > 2.25^{\frac{1}{2}} = 1.5 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。①と②を同時に満たす b は存在しないから、結局、 $b < \frac{1}{2}$ である。

[2] $\frac{e-2}{e-1} < b$ を示す。



$b \leq \frac{e-2}{e-1}$ と仮定すると、 ℓ_2 は上図のようになるから、

$$\begin{aligned} e^b &\geq \frac{e}{e-1} \\ \Leftrightarrow b &\geq 1 - \log(e-1) > 1 - 0.55 = 0.45 \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。また、 $b \leq \frac{e-2}{e-1}$ より、

$$b \leq 1 - \frac{1}{e-1} < 1 - \frac{1}{2.8-1} = \frac{4}{9} < 0.45 \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。③と④を同時に満たす b は存在しないから、結局、 $\frac{e-2}{e-1} < b$ である。

[3] $a < \frac{e-2}{e-1}$ を示す。

$0 < x < 1$ において、 $f(x)$ は単調増加であるから、

$$\begin{aligned} f(a) &< f\left(\frac{e-2}{e-1}\right) \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{e} &< \frac{e-2}{e-1} \cdot e^{-\frac{e-2}{e-1}} \\ \Leftrightarrow \frac{e-1}{e} &< e^{-\frac{e-2}{e-1}} \quad \dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

を示せばよい。⑤の両辺の自然対数を比較すればよいが、

$$\begin{aligned} \log \frac{e-1}{e} &= \log(e-1) - 1 < 0.55 - 1 = -0.45 \\ \log e^{-\frac{e-2}{e-1}} &= -\frac{e-2}{e-1} > -\frac{2.72-2}{2.6-1} = -0.45 \end{aligned}$$

となるので、確かに⑤は成り立つ。よって、 $a < \frac{e-2}{e-1}$ が成り立つ。

以上[1], [2], [3]より、題意は示された。

(証明終)

(1)

余弦定理を $\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ に適用して

$$\begin{cases} BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \\ CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7 = AB^2 + AC^2 - 4 \\ 6 = AB^2 + AD^2 - 6 \\ 5 = AC^2 + AD^2 - 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11 = AB^2 + AC^2 \\ 12 = AB^2 + AD^2 \\ 13 = AC^2 + AD^2 \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

を得る。以上3式の両辺を足し合わせることで

$$36 = 2\{AB^2 + AC^2 + AD^2\}$$

$$\Leftrightarrow 18 = AB^2 + AC^2 + AD^2$$

となる。この式にもう一度①式を代入することで

$$AB^2 = 5, AC^2 = 6, AD^2 = 7$$

を得るから、 $AB > 0, AC > 0, AD > 0$ に注意すると答は

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5}, |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{6}, |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{7}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5}, |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{6}, |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{7}$$

(2)

Hは $\triangle ABC$ を含む平面上にあるので実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{AH} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \quad \dots \textcircled{2}$$

と表せる。 $\overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{AC}$ より、

$$\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

であるから、②式を代入して

$$\begin{cases} (s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ (s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5s + 2t - 3 = 0 \\ 2s + 6t - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore s = \frac{5}{13}, t = \frac{7}{13}$$

となる。よって、

$$\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AD} = \frac{5}{13}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{13}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{DH} = \frac{5}{13}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{13}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$$

(3)

$\triangle ABC$ の面積を S とおくと

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{(\|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\|)^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{26}$$

である。また、

$$|\overrightarrow{DH}|^2 = \left| \frac{5}{13}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{13}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \right|^2$$

$$= \frac{1}{169} \left(25|\overrightarrow{AB}|^2 + 49|\overrightarrow{AC}|^2 + 169|\overrightarrow{AD}|^2 \right. \\ \left. + 70\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - 182\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} - 130\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \right)$$

$$= \frac{48}{13}$$

$$\therefore |\overrightarrow{DH}| = 4\sqrt{\frac{3}{13}}$$

となる。したがって、四面体 $ABCD$ の体積は

$$\frac{1}{3} \cdot S \cdot |\overrightarrow{DH}| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{26} \cdot 4\sqrt{\frac{3}{13}}$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{6}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{2}{3} \sqrt{6}$$