

数 学

(理学部 数学科)

(平成 25 年度)【前期日程】

問題冊子 1～4 ページ 答案用紙 4 枚

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけない。
2. 配布された用紙に、枚数の不足や印刷不鮮明な箇所がある場合には申し出ること。
3. 受験番号は、答案用紙 1 枚ごとに所定の欄 2 箇所に必ず記入すること。記入を忘れたり、誤った番号を記入したときは採点されないことがある。
4. 解答は必ず答案用紙の指定された箇所へ記入すること。やむをえず裏面にまで解答が及ぶ場合には、その旨を明記し、かつ、受験番号等を記入する部分（上部、右部分）の裏には記入しないこと。
5. 試験が終了したら、4 枚の答案用紙を上から（その 1）、（その 2）、（その 3）、（その 4）の順になるように机上におくこと。
6. 退場するときは、問題冊子を持ち帰ること。

試験問題は、次ページからです。

1

a, b を 0 でない実数とし,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ -b^2 & 2ab \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。さらに、実数 p を、 $B = A - pE$ が $B^2 = O$ を満たすように定める。

(1) p を a, b を用いて表せ。

(2) 自然数 n に対し,

$$A^n = sE + tB \quad (s, t \text{ は実数})$$

と表すとき、 s, t を n, a, b を用いて表せ。

(3) 自然数 n に対し,

$$A^n \begin{pmatrix} a \\ r \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} a \\ r \end{pmatrix}$$

を満たす実数 q と r を n, a, b を用いて表せ。

2

曲線 $C: y = (x^2 - x - 1)^2 - 1$ と直線 $\ell_a: y = a$ (a は実数) を考える。

- (1) 曲線 C と直線 ℓ_a の共有点の個数を求めよ。
- (2) 曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積の和を求めよ。

3

関数 $f(x) = xe^{-x}$ について、実数 a, b は次の条件を満たすものとする。

$$(A) \quad \int_0^1 f(x) dx = f(a) \quad (0 < a < 1),$$

$$(B) \quad f(1) - f(0) = f'(b) \quad (0 < b < 1)$$

また、点 $(0, 0)$, (a, e^a) を通る直線を ℓ_1 とし、点 $(1, 0)$, (b, e^b) を通る直線を ℓ_2 とする。

- (1) (A), (B) を利用して、 ℓ_1, ℓ_2 の方程式を a, b を用いずに表せ。
- (2) ℓ_1 と ℓ_2 の交点を求めよ。さらに、曲線 $y = e^x$ 上の点 $(1, e)$ における接線と直線 ℓ_2 の交点を求めよ。
- (3) 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$a < \frac{e-2}{e-1} < b < \frac{1}{2}$$

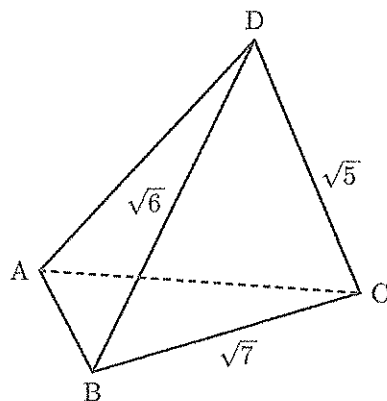
ただし、必要ならば $e = 2.718\cdots$, $\log(e-1) = 0.541\cdots$ を用いてよい。

4

次の条件を満たす四面体 ABCD を考える。

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2, \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 4, \quad \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 3,$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{7}, \quad |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{5}, \quad |\overrightarrow{DB}| = \sqrt{6}$$



次の問いに答えよ。

- (1) $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{AC}|$, $|\overrightarrow{AD}|$ を求めよ。
- (2) 点 D から 3 点 A, B, C を含む平面に下ろした垂線の足を H とする。
 $\overrightarrow{DH}$ を $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ を用いて表せ。
- (3) 四面体 ABCD の体積を求めよ。