

# 数 学

(工 学 部)

(平成 25 年度)【前期日程】

問題冊子 1～4 ページ      答案用紙 4 枚

## 注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけない。
2. 配布された用紙に、枚数の不足や印刷不鮮明な箇所がある場合には申し出ること。
3. 受験番号は、答案用紙 1 枚ごとに所定の欄 2 箇所にならず記入すること。記入を忘れたり、誤った番号を記入したときは採点されないことがある。
4. 解答は必ず答案用紙の指定された箇所へ記入すること。やむをえず裏面にまで解答が及ぶ場合には、その旨を明記し、かつ、受験番号等を記入する部分(上部、右部分)の裏には記入しないこと。
5. 試験が終了したら、4 枚の答案用紙を上から(その 1)、(その 2)、(その 3)、(その 4)の順になるように机上におくこと。
6. 退場するときは、問題冊子を持ち帰ること。

試験問題は、次ページからです。

1

$a, b$  を 0 でない実数とし,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ -b^2 & 2ab \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。さらに、実数  $p$  を、 $B = A - pE$  が  $B^2 = O$  を満たすように定める。

(1)  $p$  を  $a, b$  を用いて表せ。

(2) 自然数  $n$  に対し,

$$A^n = sE + tB \quad (s, t \text{ は実数})$$

と表すとき、 $s, t$  を  $n, a, b$  を用いて表せ。

(3) 自然数  $n$  に対し,

$$A^n \begin{pmatrix} a \\ r \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} a \\ r \end{pmatrix}$$

を満たす実数  $q$  と  $r$  を  $n, a, b$  を用いて表せ。

2

数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  の一般項を

$$a_n = \int_0^1 x(1-x)^n dx, \quad b_n = \int_0^1 x^2(1-x)^n dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。

(1)  $a_n$  を求めよ。

(2)  $b_n$  を求めよ。

(3)  $S_n = \sum_{k=1}^n b_k$  とする。  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を求めよ。

3

- (1)  $f(x)$  を区間  $0 \leq x \leq 1$  で定義された連続関数とする。次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$$

- (2)  $a > 1$  とする。(1) を用いて、積分

$$\int_0^\pi \frac{x(a^2 - 4\cos^2 x)\sin x}{a^2 - \cos^2 x} dx$$

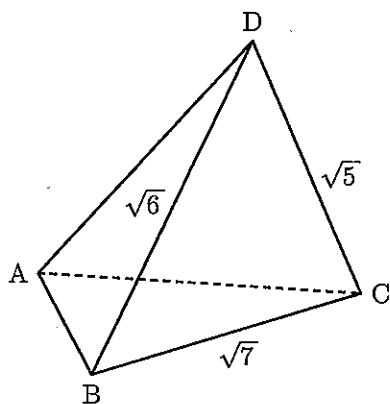
を求めよ。

4

次の条件を満たす四面体 ABCD を考える。

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2, \quad \vec{AC} \cdot \vec{AD} = 4, \quad \vec{AD} \cdot \vec{AB} = 3,$$

$$|\vec{BC}| = \sqrt{7}, \quad |\vec{CD}| = \sqrt{5}, \quad |\vec{DB}| = \sqrt{6}$$



次の問いに答えよ。

- (1)  $|\vec{AB}|$ ,  $|\vec{AC}|$ ,  $|\vec{AD}|$  を求めよ。
- (2) 点 D から 3 点 A, B, C を含む平面に下ろした垂線の足を H とする。  
 $\vec{DH}$  を  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{AD}$  を用いて表せ。
- (3) 四面体 ABCD の体積を求めよ。