

$f(x)$ が x についての 2 次関数であることと $f(a)=0$ より, 0 でない実数 b と実数 c を用いて

$$f(x) = b(x-a)^2 + c(x-a)$$

とかける。このとき

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x f(t) dt \\ &= \left[\frac{b}{3}(t-a)^3 + \frac{c}{2}(t-a)^2 \right]_a^x \\ &= \frac{b}{3}(x-a)^3 + \frac{c}{2}(x-a)^2 \end{aligned}$$

である。よって $F(2a) = -a^3$, $F(3a) = -8a^3$ より,

$$\frac{ba^3}{3} + \frac{ca^2}{2} = -a^3, \quad \frac{8ba^3}{3} + 2ca^2 = -8a^3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。

[1] $a=0$ のとき

このとき①はに b, c によらず成り立つ。よって $f(x), F(x)$ は

$$f(x) = bx^2 + cx, \quad F(x) = \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2 \quad (b \text{ は } 0 \text{ でない実数, } c \text{ は任意の実数})$$

となる。

[2] $a \neq 0$ のとき

このとき①より

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{a}{3} \cdot b + \frac{c}{2} = -a \\ \frac{8a}{3} \cdot b + 2c = -8a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 \\ c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

である。よって

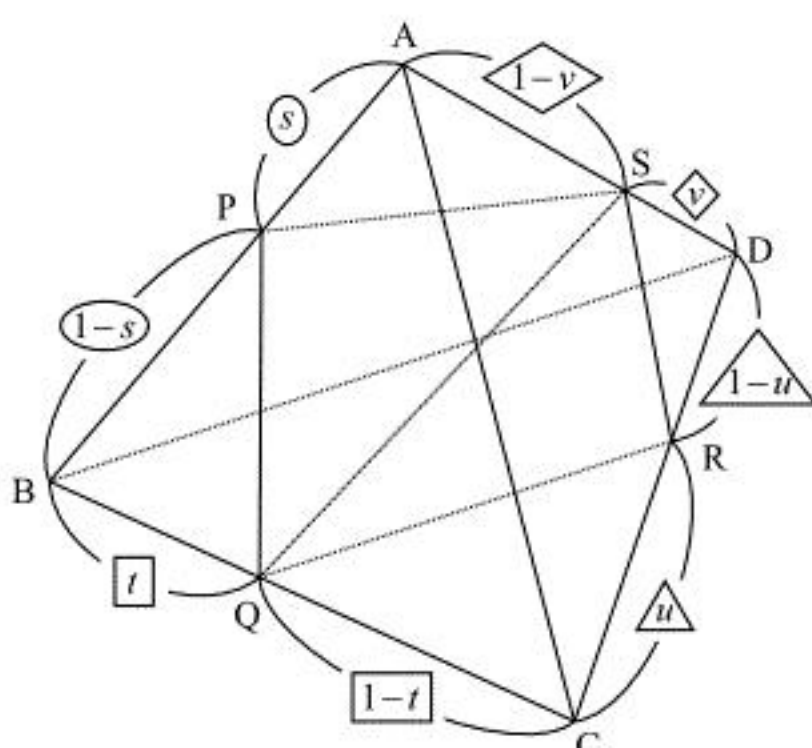
$$f(x) = -3(x-a)^2, \quad F(x) = -(x-a)^3$$

となる。

(答) $a=0$ のとき, $f(x) = bx^2 + cx, F(x) = \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2$ (b は 0 でない実数, c は任意の実数)

$a \neq 0$ のとき, $f(x) = -3(x-a)^2, F(x) = -(x-a)^3$

(1)



上図のように、 $0 < s, t, u, v < 1$ を満たす実数 s, t, u, v を用いて、

$$AP:PB = s:(1-s)$$

$$BQ:QC = t:(1-t)$$

$$CR:RD = u:(1-u)$$

$$DS:SA = v:(1-v)$$

とおく。 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とおくと、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} \\ &= (1-t)\vec{b} + t\vec{c} - s\vec{b} \\ &= (1-s-t)\vec{b} + t\vec{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RS} &= \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AR} \\ &= (1-v)\vec{d} - \{(1-u)\vec{c} + u\vec{d}\} \\ &= -(1-u)\vec{c} + (1-u-v)\vec{d}\end{aligned}$$

となるが、与えられた条件より $\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{RS}$ が平行であることから、 0 でない実数 k を用いて

$$\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{RS}$$

と表せる。したがって、

$$(1-s-t)\vec{b} + t\vec{c} = -k(1-u)\vec{c} + k(1-u-v)\vec{d}$$

となり、 $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ が一次独立なベクトルであることから、

$$\begin{cases} 1-s-t=0 \\ t=-k(1-u) \\ 0=k(1-u-v) \end{cases}$$

$$\therefore t=1-s, v=1-u \quad (\because k \neq 0)$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned}\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} &= \frac{s}{1-s} \cdot \frac{t}{1-t} \cdot \frac{u}{1-u} \cdot \frac{v}{1-v} \\ &= \frac{s}{1-s} \cdot \frac{1-s}{s} \cdot \frac{u}{1-u} \cdot \frac{1-u}{u} \\ &= 1\end{aligned}$$

となることから、題意は示された。

(証明終)

(2)

異なる4点 P, Q, R, S は同一平面上にあることから、実数 m, n を用いて

$$\overrightarrow{PR} = m\overrightarrow{PQ} + n\overrightarrow{PS}$$

と表すことができる。ここで、3点 P, Q, R は一直線上に存在することはないから、 $m \neq 0$ かつ $n \neq 0$ である。このとき、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AR} &= \overrightarrow{AP} + m\overrightarrow{PQ} + n\overrightarrow{PS} \\ &= s\vec{b} + m\{(1-s-t)\vec{b} + t\vec{c}\} + n\{(1-v)\vec{d} - s\vec{b}\} \\ &= \{m(1-t) - (m+n-1)s\}\vec{b} + mt\vec{c} + n(1-v)\vec{d}\end{aligned}$$

となる。一方、点 R は辺 CD を $u:(1-u)$ に内分する点であるから、

$$\overrightarrow{AR} = (1-u)\vec{c} + u\vec{d}$$

とも表せる。 $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ は一次独立なベクトルであることから、

$$\begin{cases} m(1-t) = (m+n-1)s \\ mt = 1-u \\ n(1-v) = u \end{cases}$$

が成り立ち、この3本の等式の各辺の和をとると、

$$\begin{aligned}m(1-t) + mt + n(1-v) &= (m+n-1)s + 1-u+u \\ \Leftrightarrow (m+n-1)(1-s) &= nv\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $m \neq 0, 0 < s, t < 1$ であることから $m+n-1 \neq 0$ であるため

$$\begin{aligned}\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} &= \frac{s}{1-s} \cdot \frac{t}{1-t} \cdot \frac{u}{1-u} \cdot \frac{v}{1-v} \\ &= \frac{s}{1-t} \cdot \frac{t}{1-u} \cdot \frac{u}{1-v} \cdot \frac{v}{1-s} \\ &= \frac{m}{m+n-1} \cdot \frac{1}{m} \cdot n \cdot \frac{m+n-1}{n} \quad (\because m+n-1, m, n \neq 0) \\ &= 1\end{aligned}$$

となることから、題意は示された。

(証明終)

(1)

条件より

$$a_{n+1} = \frac{Aa_n + B}{a_n + 2} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_n b_n - a_n + b_n + 3 = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \dots \textcircled{2}$$

が与えられている。②式に $n=1$ を代入して、 $a_1=4$ より

$$a_1 b_1 - a_1 + b_1 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow b_1 = \frac{1}{5}$$

を得る。したがって、数列 $\{b_n\}$ の公比を r とおくと、 $b_n = \frac{1}{5} r^{n-1}$ と表せる。以下、 r の値で場合を分けて考える。

[1] $r=0$ のとき

このとき、 $2 \leq n$ において、 $b_n=0$ であり、②式より、 $a_n=3$ である。したがって、①式を $n=1, 2$ で考えることで、

$$\begin{cases} a_2 = \frac{Aa_1 + B}{a_1 + 2} \\ a_3 = \frac{Aa_2 + B}{a_2 + 2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4A + B = 18 \\ 3A + B = 15 \end{cases}$$

$$\therefore A=3, B=6$$

が必要である。一方、 $A=3, B=6$ のとき、 $3 \leq n$ においても条件を満たす。

[2] $r=1$ のとき

このとき、すべての自然数 n において、 $b_n = \frac{1}{5}$ であり、②式より、 $a_n=4$ である。したが

って、①式より、

$$4 = \frac{4A + B}{4 + 2}$$

$$\Leftrightarrow 4A + B = 24$$

を得る。よって、 t を実数として、

$$A=t, B=24-4t$$

の形は、すべて条件を満たす。

[3] $r=-1$ のとき

このとき、すべての奇数 n において $b_n = \frac{1}{5}$ であり、すべての偶数 n において $b_n = -\frac{1}{5}$ であ

る。よって、②式より、すべての奇数 n において $a_n=4$ であり、すべての偶数 n において

$a_n = \frac{7}{3}$ である。したがって、①式を $n=1, 2$ で考えることで、

$$\begin{cases} a_2 = \frac{Aa_1 + B}{a_1 + 2} \\ a_3 = \frac{Aa_2 + B}{a_2 + 2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4A + B = 14 \\ \frac{7}{3}A + B = \frac{52}{3} \end{cases}$$

$$\therefore A=-2, B=22$$

が必要である。一方、 $A=-2, B=22$ のとき、 $3 \leq n$ においても条件を満たす。

[4] $r \neq 0, \pm 1$ のとき

このとき、②式より、

$$a_n b_n - a_n + b_n + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow b_n (a_n + 1) = a_n - 3$$

であり、 $a_n + 1 = 0$ とすると等式が成り立たないため、 $a_n + 1 \neq 0$ のもとで両辺を $a_n + 1$ で

割ると、

$$b_n = \frac{a_n - 3}{a_n + 1}$$

$$= 1 - \frac{4}{a_n + 1}$$

を得る。ここで、 $r \neq 0, \pm 1$ のとき、数列 $\{b_n\}$ には3個以上の異なる数が現れるため、数列 $\{a_n\}$ にも3個以上の異なる数が現れることに注意する。①式より、すべての自然数 n において、

$$b_{n+1} = r b_n$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_{n+1} - 3}{a_{n+1} + 1} = \frac{r(a_n - 3)}{a_n + 1}$$

$$\Leftrightarrow (a_{n+1} - 3)(a_n + 1) = r(a_{n+1} + 1)(a_n - 3)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{Aa_n + B}{a_n + 2} - 3 \right) (a_n + 1) = r \left(\frac{Aa_n + B}{a_n + 2} + 1 \right) (a_n - 3)$$

$$\Leftrightarrow \{(A-3)a_n + B-6\}(a_n + 1) = r\{(A+1)a_n + B+2\}(a_n - 3)$$

$$\Leftrightarrow (A-3)a_n^2 + (A+B-9)a_n + B-6 = r\{(A+1)a_n^2 + (-3A+B-1)a_n - 3r(B+2)\}$$

が成立する。 a_n が異なる3個以上の数を取ることから、上式が n の値に依らず成立する

ための、定数 A, B, r が満たす条件は、

$$\begin{cases} A-3=r(A+1) \\ A+B-9=r(-3A+B-1) \\ B-6=-3r(B+2) \end{cases}$$

である。よって、

$$A+B-9=r(-3A+B-1)$$

$$\Leftrightarrow 3(A+B-9)=-9(rA)+3rB-3r$$

$$\Leftrightarrow 3A+3B-27=-9(A-3-r)+(-B+6-6r)-3r$$

$$\Leftrightarrow 3A+B=15$$

を得る。また、 $A+1 \neq 0, A-3 \neq 0, B+2 \neq 0, B-6 \neq 0$ より、

$$\frac{-3(A-3)}{A+1} = \frac{B-6}{B+2}$$

$$\Leftrightarrow -3(A-3)(B+2) = (A+1)(B-6)$$

$$\Leftrightarrow -3(A-3)(17-3A) = -3(A+1)(A-3)$$

$$\therefore A=4$$

を得る。よって、 $B=3, r=\frac{1}{5}$ である。

以上、[1], [2], [3], [4]より、 (A, B, r) の候補は4パターンあり、それぞれの場合について

$\{a_n\}, \{b_n\}$ は、

$$a_n = \frac{3+b_n}{1-b_n}$$

$$b_n = \frac{1}{5} r^{n-1}$$

と表されることから、

$A=3, B=6, r=0$ のとき、 $\{a_n\}$ は初項4、第2項以降が3の数列、 $\{b_n\}$ は初項 $\frac{1}{5}$ 、公

比0の等比数列

$4A+B=24, r=1$ のとき、 $\{a_n\}$ は全ての項が4の数列、 $\{b_n\}$ は初項 $\frac{1}{5}$ 、公比1の等比

数列

$A=2, B=-22, r=-1$ のとき、 $\{a_n\}$ は $a_n = \frac{15+(-1)^{n-1}}{5-(-1)^{n-1}}$ と表される数列、 $\{b_n\}$ は初項

$\frac{1}{5}$ 、公比-1の等比数列

$A=4, B=3, r=\frac{1}{5}$ のとき、 $\{a_n\}$ は $a_n = \frac{15+\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}{5-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}} = \frac{3 \cdot 5^n + 1}{5^n - 1}$ と表される数列、 $\{b_n\}$

は初項 $\frac{1}{5}$ 、公比 $\frac{1}{5}$ の等比数列

となる。また、この数列は問題文の条件①②を満たす。したがって、 A, B の値は

$$(A, B) = (3, 6), (t, 24-4t), (-2, 22), (4, 3) \quad (t \text{ は任意の実数})$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (A, B) = (3, 6), (t, 24-4t), (-2, 22), (4, 3) \quad (t \text{ は任意の実数})$$

(2)

(1)より、

$$b_n = \frac{1}{5} (n=1), 0 \quad (n \geq 2) \text{ または } b_n = \frac{1}{5}, \frac{(-1)^{n-1}}{5}, \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b_n = \frac{1}{5} (n=1), 0 \quad (n \geq 2) \text{ または } b_n = \frac{1}{5}, \frac{(-1)^{n-1}}{5}, \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

(3)

(1)より、

$$a_n = 4 \quad (n=1), 3 \quad (n \geq 2) \text{ または } a_n = 4, \frac{15+(-1)^{n-1}}{5-(-1)^{n-1}}, \frac{3 \cdot 5^n + 1}{5^n - 1}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = 4 \quad (n=1), 3 \quad (n \geq 2) \text{ または } a_n = 4, \frac{15+(-1)^{n-1}}{5-(-1)^{n-1}}, \frac{3 \cdot 5^n + 1}{5^n - 1}$$

(1)

下2桁が4の倍数であればよいので、 BC の出方を考えると、

$$12, 16, 24, 32, 36, 44, 52, 56, 64 \quad \cdots \textcircled{1}$$

の9通りである。 A はどんな数字が出ててもよいので、

$$\frac{9}{6 \cdot 6} = \frac{1}{4}$$

である。

(答) $\frac{1}{4}$

(2)

全ての目(ABC)の出方は

$$6 \times 6 \times 6 = 216$$

である。(1)同様下2桁に注目すればよい。問題の条件を満たすには、サイコロを振って出た3つの目のうちの2つを取り出しても、 $\textcircled{1}$ の組み合わせとなるような目が出てはいけない。

$\textcircled{1}$ を見ると、

2, 6の目が出るときは、奇数の目もしくは4の目と組になることで4の倍数

$\cdots \textcircled{2}$

となり、

4の目が出るときは、偶数の目と組になることで4の倍数 $\cdots \textcircled{3}$

となる。したがって、次のように場合分けをして考える。

[1] 奇数の目のみが出るとき

どんな目でも4の倍数にはならないので、このときの場合の数は、

$$3 \times 3 \times 3 = 27 \text{通り}$$

である。

[2] 偶数の目が少なくとも1回は出る時

2または6が出る時、 $\textcircled{2}$ より4の倍数にならない目の組は2もしくは6のみを使うことで実現される。したがって、

$$2 \times 2 \times 2 = 8 \text{通り}$$

存在する。

2または6が出ないとき、4の目が出なければならないが、このとき $\textcircled{3}$ より4の倍数にならない目の組は4と奇数の数2つの組に限られる。したがって、4の目を ABC のどれにするかに3通り、奇数の数の選び方に ${}_3C_1 \cdot {}_3C_1 = 9$ 通りあることに注意して、

$${}_3C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot 3 = 27 \text{通り}$$

存在する。

以上[1], [2]より、求める確率は、

$$\frac{27+8+27}{216} = \frac{31}{108}$$

である。

(答) $\frac{31}{108}$