

(1)

数学的帰納法を用いて、すべての自然数 n に対して

$$a_n \text{ は正の整数であり、かつ、} a_n \text{ と } a_{n+1} \text{ の最大公約数は } 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成立することを示す。

[1] $n=1$ のとき

$a_1=1, a_2=c$ であり、 c は正の整数であることから、 a_1 と a_2 の最大公約数は 1 である。よって、 $\textcircled{1}$ は成立する。

[2] $n=2$ のとき

$a_2=c$ は正の整数である。また、

$$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + c$$

であるが、ここで

$$x > y \text{ を満たす正の整数 } x, y \text{ の公約数は } x-y \text{ と } y \text{ の公約数に等しい} \quad \dots \textcircled{2}$$

であることに注意すると、 a_2 と a_3 の公約数は $1+c-c=1$ と c の公約数、すなわち 1 のみである。よって、このときも $\textcircled{1}$ は成立する。

[3] $n=k-1, k(k \geq 2)$ で $\textcircled{1}$ の成立を仮定したとき

このとき、 $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$ より a_{k+1} は正の整数の和となるから、正の整数である。また、 $\textcircled{2}$ より a_{k+1} と a_{k+2} の公約数は

$$a_{k+2} - a_{k+1} = (a_k + a_{k+1}) - a_{k+1} = a_k$$

と a_{k+1} の公約数に等しいが、帰納法の仮定よりこれは 1 のみである。よってこのとき、 $n=k+2$ においても $\textcircled{1}$ は成立する。

以上[1], [2], [3]より、数学的帰納法によって、すべての自然数 n について $\textcircled{1}$ が成立することが示された。

(証明終)

(2)

すべての自然数 n に対して

$$d_n = (-1)^n (a_{n+1}^2 - a_{n+2}a_n)$$

とおくと、数列 $\{d_n\}$ は $n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= (-1)^{n+1} (a_{n+2}^2 - a_{n+3}a_{n+1}) \\ &= (-1)^{n+1} \{a_{n+2}^2 - (a_{n+2} + a_{n+1})a_{n+1}\} \quad (\because a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1}) \\ &= (-1)^n \{a_{n+1}^2 - a_{n+2}(a_{n+2} - a_{n+1})\} \\ &= (-1)^n \{a_{n+1}^2 - a_{n+2}a_n\} \quad (\because a_{n+2} = a_{n+1} + a_n) \\ &= d_n \end{aligned}$$

を満たすから、すべての自然数 n に対して同じ値をとる。したがって、 $(-1)^n (a_{n+1}^2 - a_{n+2}a_n)$ は n によらず一定の値であることが示された。

(証明終)

(3)

まず、(2)で定義した数列 $\{d_n\}$ について、初項 d_1 の値は

$$\begin{aligned} d_1 &= -(a_2^2 - a_3a_1) \\ &= -\{c^2 - (c+1) \cdot 1\} \\ &= -(c^2 - c - 1) \\ &= -\{(c-2)^2 + 3c - 5\} \end{aligned}$$

であるから、 $c \geq 2$ のとき $d_1 < 0$ となる。よって、(2)の結果よりすべての自然数 n について

$$d_n < 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。以下、 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ について n の偶奇について場合分けして考える。

[1] n が偶数のとき

(1)の結果より、 a_n, a_{n+1}, a_{n+2} が正の整数であることに注意すると、 $\textcircled{3}$ より

$$\begin{aligned} d_n &< 0 \\ \Leftrightarrow a_{n+1}^2 - a_{n+2}a_n &< 0 \quad (\because (-1)^n > 0) \\ \Leftrightarrow a_{n+1}^2 &< a_{n+2}a_n \\ \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}^2}{a_na_{n+1}} &< \frac{a_{n+2}a_n}{a_na_{n+1}} \\ \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} &< \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \\ \therefore b_{n+1} &> b_n \end{aligned}$$

が成立する。

[2] n が奇数のとき

[1]と同様にして

$$\begin{aligned} d_n &< 0 \\ \Leftrightarrow a_{n+1}^2 - a_{n+2}a_n &> 0 \quad (\because (-1)^n < 0) \\ \Leftrightarrow a_{n+1}^2 &> a_{n+2}a_n \\ \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}^2}{a_na_{n+1}} &> \frac{a_{n+2}a_n}{a_na_{n+1}} \\ \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} &> \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \\ \therefore b_{n+1} &< b_n \end{aligned}$$

が成立する。

以上[1], [2]より、 n が偶数のとき $b_{n+1} > b_n$ 、 n が奇数のとき $b_{n+1} < b_n$ となることが示された。

(証明終)

2

(1)

点Cの座標を (x, y) とすると

$$\overrightarrow{AB}=(-a, b), \overrightarrow{BC}=(x, y-b)$$

であり、ここで、 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}=0, |\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$ を満たすことから

$$\begin{aligned} &\begin{cases} -ax+b(y-b)=0 \\ (-a)^2+b^2=x^2+(y-b)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{b}{a}(y-b) \\ a^2+b^2=\left(\frac{b^2}{a^2}+1\right)(y-b)^2 \end{cases} \quad (\because a>0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{b}{a}(y-b) \\ a^2=(y-b)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{b}{a}(y-b) \\ y=b\pm a \end{cases} \\ &\therefore (x, y)=(-b, b-a), (b, b+a) \end{aligned}$$

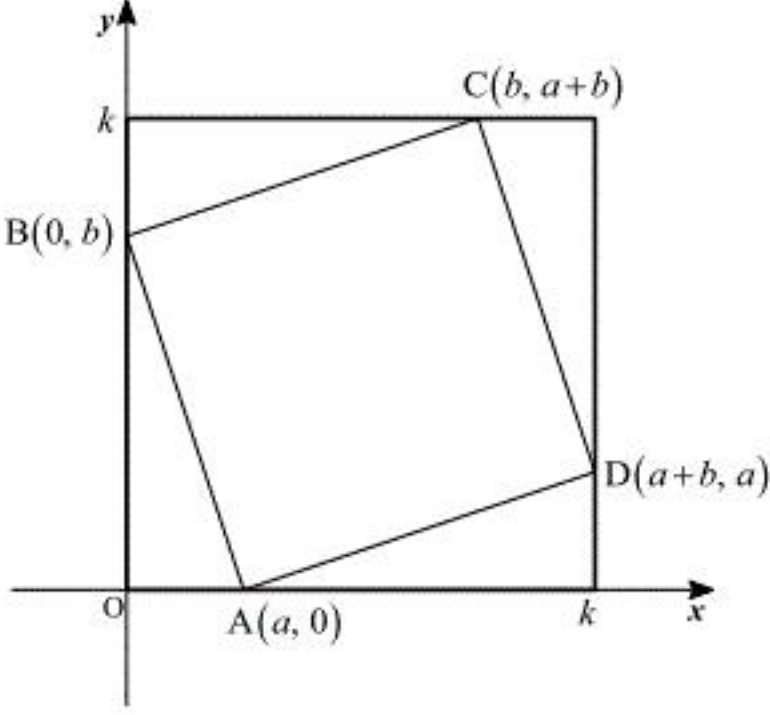
となり、Cは第1象限の点であることから、この座標は $C(b, a+b)$ ($\because a>0, b>0$) となる。また、正方形ABCDについて

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$$

が成り立つから、 $\overrightarrow{BC}=(b, a)$ より、点Dの座標は $D(a+b, a)$ となる。これは第1象限の点である。

(答) $C(b, a+b), D(a+b, a)$

(2)



正方形ABCDがEの辺上の格子点(Eの頂点を含む)を4つの頂点とする正方形になるための必要十分条件は、 a, b が整数であり、かつ

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 0 \leq a \leq k \\ 0 \leq b \leq k \\ a+b=k \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq a \leq k \\ b=k-a \end{cases} \end{aligned}$$

を満たすことである。ここで、 $a=i$ ($i=1, 2, \dots, k$) が表す正方形はすべて異なり、 $a=0$ が表す正方形と $a=k$ が表す正方形は一致するから、求める正方形の個数は k 個である。

(答) k 個

(3)

j を自然数とする。以下、 R 内の4つの格子点を頂点とする1辺 j の正方形のうち各辺が x 軸または y 軸に平行であるものの個数を $F_n(j)$ とし、そのような各正方形の辺上の格子点を4つの頂点とする正方形の個数を $E(j)$ とする。このとき、(2)の結果より $E(j)=j$ であり、 q_n は

$$q_n = F_n(1)E(1) + F_n(2)E(2) + \dots + F_n(n)E(n)$$

と計算できる。以下、各 n の値で q_n を計算する。

[1] $n=1$ のとき

$$F_1(1)=1 \text{ であるから、 } q_1 \text{ は}$$

$$q_1 = F_1(1)E(1) = 1 \cdot 1 = 1$$

と求まる。

[2] $n=2$ のとき

$$F_2(1)=2^2, F_2(2)=1^2 \text{ であるから、 } q_2 \text{ は}$$

$$q_2 = F_2(1)E(1) + F_2(2)E(2) = 2^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 2 = 6$$

と求まる。

[3] $n=3$ のとき

$$F_3(1)=3^2, F_3(2)=2^2, F_3(3)=1^2 \text{ であるから、 } q_3 \text{ は}$$

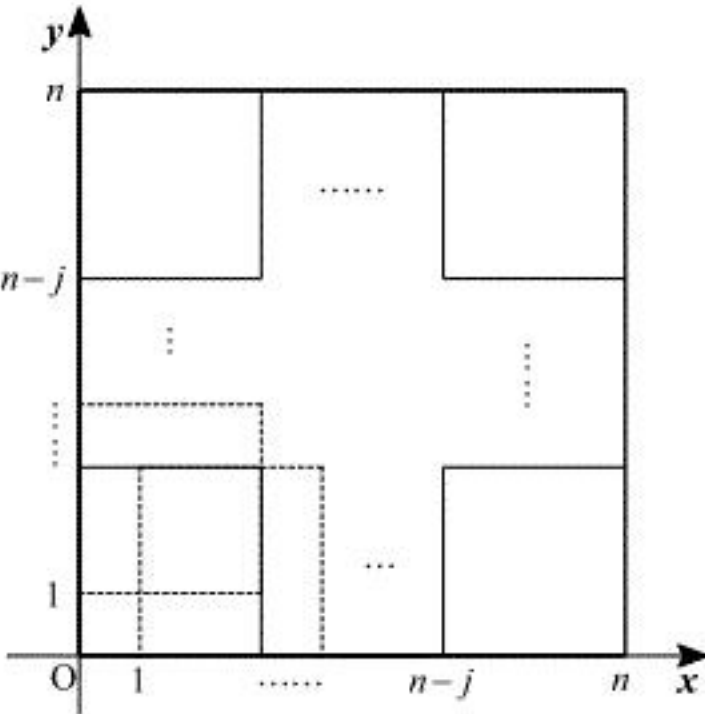
$$q_3 = F_3(1)E(1) + F_3(2)E(2) + F_3(3)E(3) = 3^2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 2 + 1^2 \cdot 3 = 20$$

と求まる。

以上[1],[2],[3]より、 $q_1=1, q_2=6, q_3=20$ である。

(答) $q_1=1, q_2=6, q_3=20$

(4)



自然数 j に対し $F_n(j)$ の値は

$$F_n(j) = \{(n-j)+1\}^2$$

であるから、 q_n の値は

$$\begin{aligned} q_n &= \sum_{j=1}^n F_n(j)E(j) \\ &= \sum_{j=1}^n \{(n-(j-1))\}^2 j \\ &= \sum_{j=1}^n \{j^3 - 2(n+1)j^2 + (n+1)^2 j\} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 2(n+1) \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$

(1)

関数 $f(x) = x^4 - 2x^3$ の導関数は

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$$

であるから、点 $P(\alpha, f(\alpha))$ における接線 ℓ の方程式は

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

$$\Leftrightarrow y = (4\alpha^3 - 6\alpha^2)(x - \alpha) + \alpha^4 - 2\alpha^3$$

$$\Leftrightarrow y = (4\alpha^3 - 6\alpha^2)x - 3\alpha^4 + 4\alpha^3$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = (4\alpha^3 - 6\alpha^2)x - 3\alpha^4 + 4\alpha^3$$

(2)

(1)の結果より、 $\alpha = 1$ のとき ℓ の方程式は

$$y = -2x + 1$$

であるから、 ℓ と C の共有点の x 座標は

$$x^4 - 2x^3 = -2x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^3 - x^2 - x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1, 1$$

となるため、 P 以外の共有点は $(-1, f(-1))$ 、すなわち $(-1, 3)$ である。

$$(\text{答}) \quad (-1, 3)$$

(3)

(1)の結果より、 ℓ と C の共有点の x 座標は

$$x^4 - 2x^3 = (4\alpha^3 - 6\alpha^2)x - 3\alpha^4 + 4\alpha^3$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^3 - (4\alpha^3 - 6\alpha^2)x + 3\alpha^4 - 4\alpha^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-\alpha)\{x^3 + (\alpha-2)x^2 + (\alpha^2-2\alpha)x + (-3\alpha^3+4\alpha^2)\} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-\alpha)^2\{x^2 + (2\alpha-2)x + 3\alpha^2-4\alpha\} = 0$$

となる。よって、 ℓ と C が P 以外に 2 つの共有点を持つのは、2 次方程式

$$x^2 + (2\alpha-2)x + 3\alpha^2 - 4\alpha = 0 \quad \cdots \text{①}$$

が $x = \alpha$ 以外の異なる 2 解を持つときである。①の判別式を D とおくと、①が異なる 2 解を持つのは

$$\frac{D}{4} > 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha-1)^2 - (3\alpha^2 - 4\alpha) > 0$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^2 - 2\alpha - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{3}}{2} < \alpha < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

のときである。また、①が $x = \alpha$ を解に持つのは

$$\alpha^2 + (2\alpha-2)\alpha + 3\alpha^2 - 4\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow 6\alpha(\alpha-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 0, 1$$

のときであるから、求める条件は

$$\frac{1-\sqrt{3}}{2} < \alpha < 0, 0 < \alpha < 1, 1 < \alpha < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1-\sqrt{3}}{2} < \alpha < 0, 0 < \alpha < 1, 1 < \alpha < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

(4)

 β, γ は①の 2 解であるから、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \beta\gamma = 3\alpha^2 - 4\alpha \\ \beta + \gamma = -2\alpha + 2 \end{cases}$$

となり、これを利用することで $(\gamma - \beta)^2$ は

$$(\gamma - \beta)^2 = (\gamma + \beta)^2 - 4\gamma\beta$$

$$= (-2\alpha + 2)^2 - 4(3\alpha^2 - 4\alpha)$$

$$= -8\alpha^2 + 8\alpha + 4$$

$$= -8\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + 6$$

となる。ここで $\gamma - \beta > 0$ であるから、 $(\gamma - \beta)^2$ が最大となるとき $\gamma - \beta$ は最大になる。(3)で求めた範囲において $(\gamma - \beta)^2$ は $\alpha = \frac{1}{2}$ で最大になるから、求める α は $\alpha = \frac{1}{2}$ である。

$$(\text{答}) \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

(1)

n が2以上の自然数であるとき、 $t = \tan^n \theta$ とおき、これを θ で微分すると

$$\frac{dt}{d\theta} = n \tan^{n-1} \theta \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

となり、さらに θ と t の対応関係は

θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$
t	0	$\rightarrow$	1

となるから、 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\theta) d\theta$ の値は

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\theta) d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^{n-1} \theta \sin^{n-1} \theta}{\cos^{2n} \theta + \sin^{2n} \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin^{n-1} \theta}{\cos^{n+1} \theta}}{1 + \frac{\sin^{2n} \theta}{\cos^{2n} \theta}} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^{n-1} \theta}{(1 + \tan^{2n} \theta)(\cos^2 \theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt \end{aligned}$$

である。ここで、 $t = \tan x$ とおき、これを x で微分すると

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

となり、さらに t と x の対応関係は

t	0	$\rightarrow$	1
x	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

となるから、 $\frac{1}{n} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$ の値は

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt &= \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1 + \tan^2 x) \cos^2 x} dx \\ &= \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x + \sin^2 x} dx \\ &= \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \\ &= \frac{\pi}{4n} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{\pi}{4n}$

(2)

関数 $f(\theta)$ について

$$\begin{cases} \theta = 0, \frac{\pi}{2} \text{ のとき, } \cos \theta \sin \theta = 0 \text{ より } f(\theta) = 0 \\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ のとき, } \cos \theta > 0, \sin \theta > 0 \text{ より } f(\theta) > 0 \end{cases}$$

であるから、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ で最小値0をとることがわかる。また、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ において、

関数 $g(\theta)$ を $g(\theta) = \frac{1}{f(\theta)}$ ($\because f(\theta) > 0$)とおくと、 $g(\theta)$ とその導関数 $g'(\theta)$ は

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \frac{\cos^{2n} \theta + \sin^{2n} \theta}{\cos^{n-1} \theta \sin^{n-1} \theta} = \frac{\cos^{n+1} \theta}{\sin^{n-1} \theta} + \frac{\sin^{n+1} \theta}{\cos^{n-1} \theta} = \left(\frac{1}{\tan \theta} \right)^{n-1} \cos^2 \theta + \tan^{n-1} \theta \sin^2 \theta \\ g'(\theta) &= \left\{ (n-1) \left(\frac{1}{\tan \theta} \right)^{n-2} \left(-\frac{1}{\sin^2 \theta} \right) \cos^2 \theta + \left(\frac{1}{\tan \theta} \right)^{n-1} (-2 \sin \theta \cos \theta) \right\} \\ &\quad + \left\{ (n-1) \tan^{n-2} \theta \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} \right) \sin^2 \theta + \tan^{n-1} \theta (2 \sin \theta \cos \theta) \right\} \\ &= (n-1) \left\{ \tan^n \theta - \left(\frac{1}{\tan \theta} \right)^n \right\} + \sin 2\theta \left\{ \tan^{n-1} \theta - \left(\frac{1}{\tan \theta} \right)^{n-1} \right\} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $n-1 > 0$ 、 $\sin 2\theta > 0$ ($\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)であり、 $\tan \theta$ について

$$\begin{cases} 0 < \theta < \frac{\pi}{4} \text{ のとき, } 0 < \tan \theta < 1 \\ \theta = \frac{\pi}{4} \text{ のとき, } \tan \theta = 1 \\ \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ のとき, } 1 < \tan \theta \end{cases}$$

であるから、 $g(\theta)$ の増減表は以下のようになる。

θ	(0)	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$g'(\theta)$		-	0	+	
$g(\theta)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$	

よって、 $g(\theta)$ は $\theta = \frac{\pi}{4}$ で最小となるから、 $f(\theta)$ は $\theta = \frac{\pi}{4}$ で最大となることがわかる。このときの最大値は

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 1$$

である。

(答) $f(\theta)$ は $\theta = \frac{\pi}{4}$ で最大値1、 $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ で最小値0をとる