

1

(1)

問題で与えられた漸化式より、 a_3 の値は

$$a_3 = a_2 + a_1 = c + 1$$

であるから、 $a_3 = a_2^2$ を満たす実数 c の値は

$$a_3 = a_2^2$$

$$\Leftrightarrow c + 1 = c^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow c^2 - c - 1 = 0$$

$$\therefore c = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad c = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

(2)

c が(1)で求めた値のとき、数列 $\{a_n\}$ の最初の3項は

$$a_1 = 1, a_2 = c, a_3 = c^2$$

であるから、この数列が等比数列であるためには、初項1、公比 c の等比数列、つまり一般項が $a_n = c^{n-1}$ となる必要がある。以下、すべての自然数 n について

$$a_n = c^{n-1} \quad \dots \textcircled{2}$$

となることを数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1, 2$ のとき

$$a_1 = 1 = c^0, a_2 = c = c^1 \text{であるから、}\textcircled{2} \text{は成立する。}$$

[2] $n=k-1, k(k \geq 2)$ で $\textcircled{2}$ の成立を仮定したとき

このとき、帰納法の仮定、問題で与えられた漸化式、そして $\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + a_{k-1} \\ &= c^{k-1} + c^{k-2} \\ &= c^{k-2}(c+1) \\ &= c^{k-2} \cdot c^2 \\ &= c^k \end{aligned}$$

となるから、 $n=k+1$ のときも $\textcircled{2}$ は成立する。

以上[1], [2]より、数学的帰納法によって、すべての自然数 n について $\textcircled{2}$ が成立することが示された。

(証明終)

(3)

(2)における考察より、数列 $\{a_n\}$ は初項1、公比 c の等比数列であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ となるた

めの必要十分条件は $-1 < c < 1$ である。ここで、 $2 < \sqrt{5} < 3$ より

$$-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$$

であるから、(1)で求めた値のうち $-1 < c < 1$ を満たす c の値は $c = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ である。

$$(\text{答}) \quad c = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

(4)

c が(3)で求めた値のとき、数列 $\{a_n\}$ は初項1、公比 $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \left(-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 1 \right)$ の等比数列である

から、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束し、その値は

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \frac{1}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \\ &= \frac{2}{1+\sqrt{5}} \\ &= \frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

2

(1)

点Cの座標を (x, y) とすると

$$\overrightarrow{AB}=(-a, b), \overrightarrow{BC}=(x, y-b)$$

であり、ここで、 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}=0, |\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$ を満たすことから

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -ax+b(y-b)=0 \\ (-a)^2+b^2=x^2+(y-b)^2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{b}{a}(y-b) \\ a^2+b^2=\left(\frac{b^2}{a^2}+1\right)(y-b)^2 \quad (\because a>0) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{b}{a}(y-b) \\ a^2=(y-b)^2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{b}{a}(y-b) \\ y=b\pm a \end{cases} \\ & \therefore (x, y)=(-b, b-a), (b, b+a) \end{aligned}$$

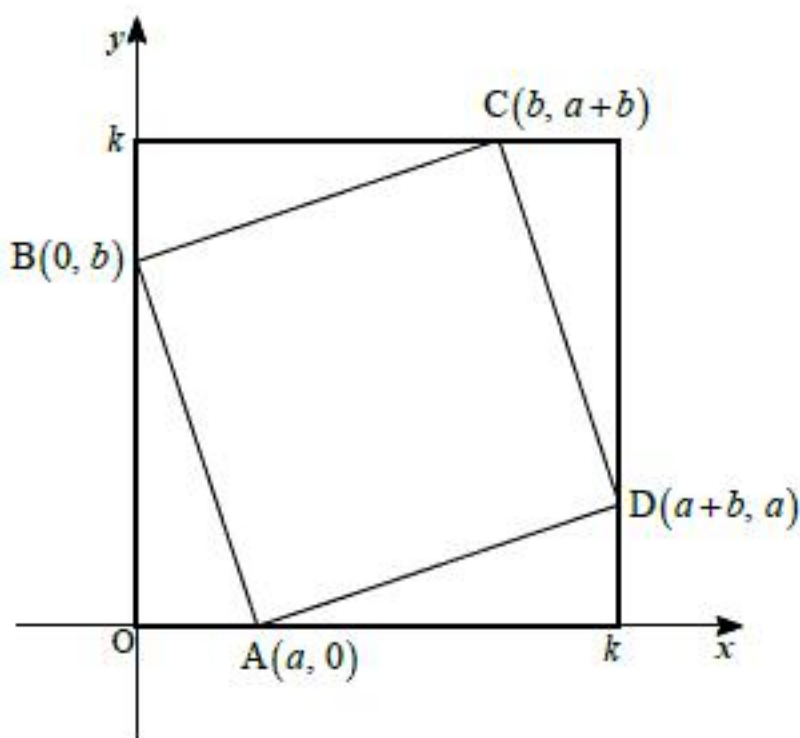
となり、Cは第1象限の点であることから、この座標は $C(b, a+b)$ ($\because a>, b>0$)となる。また、正方形ABCDについて

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$$

が成り立つから、 $\overrightarrow{BC}=(b, a)$ より、点Dの座標は $D(a+b, a)$ となる。これは第1象限の点である。

(答) $C(b, a+b), D(a+b, a)$

(2)



正方形ABCDがEの辺上の格子点(Eの頂点を含む)を4つの頂点とする正方形になるための必要十分条件は、 a, b が整数であり、かつ

$$\begin{cases} 0 \leq a \leq k \\ 0 \leq b \leq k \\ a+b=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq a \leq k \\ b=k-a \end{cases}$$

を満たすことである。ここで、 $a=i$ ($i=1, 2, \dots, k$)が表す正方形はすべて異なり、 $a=0$ が表す正方形と $a=k$ が表す正方形は一致するから、求める正方形の個数は k 個である。

(答) k 個

(3)

j を自然数とする。以下、 R 内の4つの格子点を頂点とする1辺 j の正方形のうち各辺が x 軸または y 軸に平行であるものの個数を $F_n(j)$ とし、そのような各正方形の辺上の格子点を4つの頂点とする正方形の個数を $E(j)$ とする。このとき、(2)の結果より $E(j)=j$ であり、 q_n は

$$q_n = F_n(1)E(1) + F_n(2)E(2) + \dots + F_n(n)E(n)$$

と計算できる。以下、各 n の値で q_n を計算する。

[1] $n=1$ のとき

$F_1(1)=1$ であるから、 q_1 は

$$q_1 = F_1(1)E(1) = 1 \cdot 1 = 1$$

と求まる。

[2] $n=2$ のとき

$F_2(1)=2^2, F_2(2)=1^2$ であるから、 q_2 は

$$q_2 = F_2(1)E(1) + F_2(2)E(2) = 2^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 2 = 6$$

と求まる。

[3] $n=3$ のとき

$F_3(1)=3^2, F_3(2)=2^2, F_3(3)=1^2$ であるから、 q_3 は

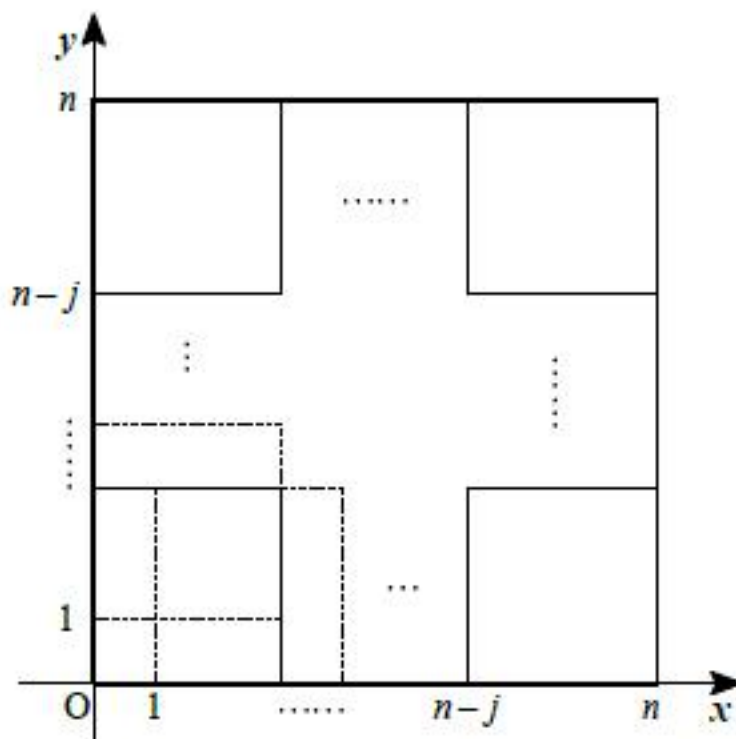
$$q_3 = F_3(1)E(1) + F_3(2)E(2) + F_3(3)E(3) = 3^2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 2 + 1^2 \cdot 3 = 20$$

と求まる。

以上[1], [2], [3]より、 $q_1=1, q_2=6, q_3=20$ である。

(答) $q_1=1, q_2=6, q_3=20$

(4)



自然数 j に対し $F_n(j)$ の値は

$$F_n(j) = \{(n-j)+1\}^2$$

であるから、 q_n の値は

$$\begin{aligned} q_n &= \sum_{j=1}^n F_n(j)E(j) \\ &= \sum_{j=1}^n \{(n-(j-1))\}^2 j \\ &= \sum_{j=1}^n \{j^3 - 2(n+1)j^2 + (n+1)^2 j\} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 2(n+1) \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$

(1)

関数 $f(x) = x^4 - 2x^3$ の導関数は

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$$

であるから、点 $P(\alpha, f(\alpha))$ における接線 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y - f(\alpha) &= f'(\alpha)(x - \alpha) \\ \Leftrightarrow y &= (4\alpha^3 - 6\alpha^2)(x - \alpha) + \alpha^4 - 2\alpha^3 \\ \Leftrightarrow y &= (4\alpha^3 - 6\alpha^2)x - 3\alpha^4 + 4\alpha^3 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = (4\alpha^3 - 6\alpha^2)x - 3\alpha^4 + 4\alpha^3$$

(2)

(1)の結果より、 $\alpha = 1$ のとき ℓ の方程式は

$$y = -2x + 1$$

であるから、 ℓ と C の共有点の x 座標は

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 &= -2x + 1 \\ \Leftrightarrow x^4 - 2x^3 + 2x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x^3 - x^2 - x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2 - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^3(x+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -1, 1 \end{aligned}$$

となるため、 P 以外の共有点は $(-1, f(-1))$ 、すなわち $(-1, 3)$ である。

$$(\text{答}) \quad (-1, 3)$$

(3)

(1)の結果より、 ℓ と C の共有点の x 座標は

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 &= (4\alpha^3 - 6\alpha^2)x - 3\alpha^4 + 4\alpha^3 \\ \Leftrightarrow x^4 - 2x^3 - (4\alpha^3 - 6\alpha^2)x + 3\alpha^4 - 4\alpha^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-\alpha)\{x^3 + (\alpha-2)x^2 + (\alpha^2-2\alpha)x + (-3\alpha^3+4\alpha^2)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-\alpha)^2\{x^2 + (2\alpha-2)x + 3\alpha^2-4\alpha\} &= 0 \end{aligned}$$

となる。よって、 ℓ と C が P 以外に 2 つの共有点を持つのは、2 次方程式

$$x^2 + (2\alpha-2)x + 3\alpha^2 - 4\alpha = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が $x = \alpha$ 以外の異なる 2 解を持つときである。①の判別式を D とおくと、①が異なる 2 解を持つのは

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &> 0 \\ \Leftrightarrow (\alpha-1)^2 - (3\alpha^2 - 4\alpha) &> 0 \\ \Leftrightarrow 2\alpha^2 - 2\alpha - 1 &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{3}}{2} < \alpha < \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

のときである。また、①が $x = \alpha$ を解に持つのは

$$\begin{aligned} \alpha^2 + (2\alpha-2)\alpha + 3\alpha^2 - 4\alpha &= 0 \\ \Leftrightarrow 6\alpha(\alpha-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha &= 0, 1 \end{aligned}$$

のときであるから、求める条件は

$$\frac{1-\sqrt{3}}{2} < \alpha < 0, 0 < \alpha < 1, 1 < \alpha < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1-\sqrt{3}}{2} < \alpha < 0, 0 < \alpha < 1, 1 < \alpha < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

(4)

 β, γ は①の 2 解であるから、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \beta\gamma = 3\alpha^2 - 4\alpha \\ \beta + \gamma = -2\alpha + 2 \end{cases}$$

となり、これを利用することで $(\gamma - \beta)^2$ は

$$\begin{aligned} (\gamma - \beta)^2 &= (\gamma + \beta)^2 - 4\gamma\beta \\ &= (-2\alpha + 2)^2 - 4(3\alpha^2 - 4\alpha) \\ &= -8\alpha^2 + 8\alpha + 4 \\ &= -8\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + 6 \end{aligned}$$

となる。ここで $\gamma - \beta > 0$ であるから、 $(\gamma - \beta)^2$ が最大となるとき $\gamma - \beta$ は最大になる。(3)で求めた範囲において $(\gamma - \beta)^2$ は $\alpha = \frac{1}{2}$ で最大になるから、求める α は $\alpha = \frac{1}{2}$ である。

$$(\text{答}) \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

4

(1)

$t = \tan^2 \theta$ とおき、これを θ で微分すると

$$\frac{dt}{d\theta} = 2 \tan \theta \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

となり、さらに θ と t の対応関係は

θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$
t	0	$\rightarrow$	1

となるから、 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\theta) d\theta$ の値は

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\theta) d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos \theta \sin \theta}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta}}{1 + \frac{\sin^4 \theta}{\cos^4 \theta}} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan \theta}{(1 + \tan^4 \theta)(\cos^2 \theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt \end{aligned}$$

である。ここで、 $t = \tan x$ とおき、これを x で微分すると

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

となり、さらに t と x の対応関係は

t	0	$\rightarrow$	1
x	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

となるから、 $\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$ の値は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1 + \tan^2 x) \cos^2 x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x + \sin^2 x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \\ &= \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{\pi}{8}$

(2)

関数 $f(\theta) = \frac{\cos \theta \sin \theta}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta}$ について

$$\begin{aligned} f(\theta + \pi) &= \frac{\cos(\theta + \pi) \sin(\theta + \pi)}{\cos^4(\theta + \pi) + \sin^4(\theta + \pi)} \\ &= \frac{(-\cos \theta)(-\sin \theta)}{(-\cos \theta)^4 + (-\sin \theta)^4} \\ &= \frac{\cos \theta \sin \theta}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta} \\ &= f(\theta) \end{aligned}$$

であることから、以下 $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で考えるものとする。ここで、導関数 $f'(\theta)$ を計算すると

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \frac{(-\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) - \cos \theta \sin \theta (-4 \cos^3 \theta \sin \theta + 4 \sin^3 \theta \cos \theta)}{(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)^2} \\ &= \frac{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) + 4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)^2} \\ &= \frac{\cos 2\theta (\cos^4 \theta + 4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta)}{(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)^2} \\ &= \frac{\cos 2\theta (1 + 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta)}{(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)^2} \end{aligned}$$

となるから、 $f(\theta)$ の増減表は以下のようになる。

θ	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{3}{4}\pi$	...	π
$f'(\theta)$		+	0	-	0	+	
$f(\theta)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	0

ここで、 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ 、 $f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -1$ であるから、 $0 \leq \theta \leq \pi$ において $f(\theta)$ は $\theta = \frac{\pi}{4}$ で最大値1、

$\theta = \frac{3}{4}\pi$ で最小値-1をとることがわかる。したがって、 θ が全実数を取りうるとき、 n を整数

として $f(\theta)$ は $\theta = \left(\frac{1}{4} + n\right)\pi$ で最大値1、 $\theta = \left(\frac{3}{4} + n\right)\pi$ で最小値-1をとる。

(答) $f(\theta)$ は $\theta = \left(\frac{1}{4} + n\right)\pi$ で最大値1、 $\theta = \left(\frac{3}{4} + n\right)\pi$ で最小値-1をとる