

数 学

(理学部 数学科)

(平成27年度)【前期日程】

問題冊子 1～4 ページ 答案用紙 4 枚

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけない。
2. 配布された用紙に、枚数の不足や印刷不鮮明な箇所がある場合には申し出ること。
3. 受験番号は、答案用紙1枚ごとに所定の欄2箇所に必ず記入すること。記入を忘れたり、誤った番号を記入したときは採点されないことがある。
4. 解答は必ず答案用紙の指定された箇所へ記入すること。やむをえず裏面にまで解答が及ぶ場合には、その旨を明記し、かつ、受験番号等を記入する部分(上部、右部分)の裏には記入しないこと。
5. 試験が終了したら、4枚の答案用紙を上から(その1)、(その2)、(その3)、(その4)の順になるように机上におくこと。
6. 退場するときは、問題冊子を持ち帰ること。

1

c は正の整数とする。数列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ は $a_1 = 1, a_2 = c$ であり、さらに漸化式

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 a_n は正の整数であり、かつ、 a_n と a_{n+1} の最大公約数は 1 であることを示せ。

(2) $(-1)^n(a_{n+1}^2 - a_{n+2}a_n)$ は n によらず一定の値であることを示せ。

(3) $c \geq 2$ とし、 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ とおくと

$$\begin{cases} b_{n+1} > b_n & (n \text{ が偶数のとき}) \\ b_{n+1} < b_n & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

が成り立つことを示せ。

2

xy 平面上の点 P の x 座標および y 座標がともに整数であるとき、 P を格子点とよぶ。また、自然数 n に対して、連立不等式

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq n \\ 0 \leq y \leq n \end{cases}$$

の表す領域を R とする。 R 内の 4 つの格子点を頂点とする正方形の個数を q_n とする。次の問いに答えよ。

- (1) xy 平面上の 2 点 $A(a, 0), B(0, b)$ ($a > 0, b > 0$) を結ぶ線分を 1 辺とする正方形 $ABCD$ を考える。点 C, D が第 1 象限に含まれるとき、 C, D の座標を求めよ。
- (2) k は自然数とする。4 点 $(0, 0), (k, 0), (k, k), (0, k)$ を頂点とする正方形を E とする。 E の辺上の格子点 (E の頂点を含む) を 4 つの頂点とする正方形の個数を求めよ。
- (3) q_1, q_2, q_3 を求めよ。
- (4) q_n を求めよ。

3

$f(x) = x^4 - 2x^3$ とし、曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $P(\alpha, f(\alpha))$ における接線を ℓ とする。次の問いに答えよ。

- (1) ℓ の方程式を求めよ。
- (2) $\alpha = 1$ のとき、 ℓ と C との P 以外の共有点をすべて求めよ。
- (3) ℓ と C が P 以外に 2 つの共有点を持つような α の範囲を求めよ。
- (4) ℓ と C が P 以外の共有点 $(\beta, f(\beta)), (\gamma, f(\gamma))$ ($\beta < \gamma$) を持つとする。このとき、 $\gamma - \beta$ が最大となる α の値を求めよ。

4

n は 2 以上の自然数とし,

$$f(\theta) = \frac{\cos^{n-1} \theta \sin^{n-1} \theta}{\cos^{2n} \theta + \sin^{2n} \theta}$$

とする。次の問いに答えよ。

- (1) $t = \tan^n \theta$ と変数変換することにより, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\theta) d\theta$ を求めよ。
- (2) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で $f(\theta)$ の最大値および最小値を求めよ。