

# 数 学

(工 学 部)

(平成27年度)【前期日程】

問題冊子 1～4ページ      答案用紙 4枚

## 注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけない。
2. 配布された用紙に、枚数の不足や印刷不鮮明な箇所がある場合には申し出ること。
3. 受験番号は、答案用紙1枚ごとに所定の欄2箇所に必ず記入すること。記入を忘れたり、誤った番号を記入したときは採点されないことがある。
4. 解答は必ず答案用紙の指定された箇所へ記入すること。やむをえず裏面にまで解答が及ぶ場合には、その旨を明記し、かつ、受験番号等を記入する部分(上部、右部分)の裏には記入しないこと。
5. 試験が終了したら、4枚の答案用紙を上から(その1)、(その2)、(その3)、(その4)の順になるように机の上におくこと。
6. 退場するときは、問題冊子を持ち帰ること。

1

$c$  は実数とする。数列  $a_1, a_2, a_3, \dots$  は  $a_1 = 1, a_2 = c$  であり、さらに漸化式

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

- (1)  $a_3 = a_2^2$  が成り立つような  $c$  の値を求めよ。
- (2)  $c$  が (1) で求めた値のとき、数列  $a_1, a_2, a_3, \dots$  が等比数列であることを数学的帰納法を用いて示せ。
- (3) (1) で求めた  $c$  の値のうち、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  となるものを求めよ。
- (4)  $c$  が (3) で求めた値のとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  を求めよ。

2

$xy$  平面上の点  $P$  の  $x$  座標および  $y$  座標がともに整数であるとき、 $P$  を格子点とよぶ。また、自然数  $n$  に対して、連立不等式

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq n \\ 0 \leq y \leq n \end{cases}$$

の表す領域を  $R$  とする。 $R$  内の 4 つの格子点を頂点とする正方形の個数を  $q_n$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $xy$  平面上の 2 点  $A(a, 0), B(0, b)$  ( $a > 0, b > 0$ ) を結ぶ線分を 1 辺とする正方形  $ABCD$  を考える。点  $C, D$  が第 1 象限に含まれるとき、 $C, D$  の座標を求めよ。
- (2)  $k$  は自然数とする。4 点  $(0, 0), (k, 0), (k, k), (0, k)$  を頂点とする正方形を  $E$  とする。 $E$  の辺上の格子点 ( $E$  の頂点を含む) を 4 つの頂点とする正方形の個数を求めよ。
- (3)  $q_1, q_2, q_3$  を求めよ。
- (4)  $q_n$  を求めよ。

3

$f(x) = x^4 - 2x^3$  とし、曲線  $C: y = f(x)$  上の点  $P(\alpha, f(\alpha))$  における接線を  $\ell$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $\ell$  の方程式を求めよ。
- (2)  $\alpha = 1$  のとき、 $\ell$  と  $C$  との  $P$  以外の共有点をすべて求めよ。
- (3)  $\ell$  と  $C$  が  $P$  以外に 2 つの共有点を持つような  $\alpha$  の範囲を求めよ。
- (4)  $\ell$  と  $C$  が  $P$  以外の共有点  $(\beta, f(\beta)), (\gamma, f(\gamma))$  ( $\beta < \gamma$ ) を持つとする。このとき、 $\gamma - \beta$  が最大となる  $\alpha$  の値を求めよ。

4

関数  $f(\theta) = \frac{\cos \theta \sin \theta}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta}$  について、次の問いに答えよ。

- (1)  $t = \tan^2 \theta$  と変数変換することにより、 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\theta) d\theta$  を求めよ。
- (2)  $f(\theta)$  の最大値および最小値を求めよ。