

真数条件より、

$$\begin{cases} x-3 > 0 \\ 2x-a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x > \frac{a}{2} \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。この条件のもとで、与えられた方程式を変形すると、

$$\begin{aligned} \log_2(x-3) &= \log_4(2x-a) \\ \Leftrightarrow \log_2(x-3) &= \frac{\log_2(2x-a)}{\log_2 4} \\ \Leftrightarrow 2\log_2(x-3) &= \log_2(2x-a) \\ \Leftrightarrow \log_2(x-3)^2 &= \log_2(2x-a) \\ \therefore (x-3)^2 &= 2x-a \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} (x-3)^2 &= 2x-a \\ \Leftrightarrow x^2 - 8x + 9 + a &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-4)^2 + a - 7 &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$f(x) = (x-4)^2 + a - 7$$

とおき、 a の値による場合分けを考える。

[1] $\frac{a}{2} \leq 3$, すなわち $a \leq 6$ のとき

①より $x > 3$ である。したがって、2次方程式 $f(x) = 0$ が $x > 3$ の範囲に異なる2つの実数解をもつための a の条件は

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4 > 3 \\ f(3) > 0 \\ a - 7 < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a > 6 \\ a < 7 \end{cases} \\ \Leftrightarrow 6 < a < 7 \end{aligned}$$

であるが、これは $a \leq 6$ に反するため不適である。

[2] $3 < \frac{a}{2}$, すなわち $a > 6$ のとき

①より $x > \frac{a}{2}$ である。したがって、2次方程式 $f(x) = 0$ が $x > \frac{a}{2}$ の範囲に異なる2つの実数解をもつための a の条件は

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4 > \frac{a}{2} \\ f\left(\frac{a}{2}\right) > 0 \\ a - 7 < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2}{4} - 4a + 9 + a > 0 \\ a < 7 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (a-6)^2 > 0 \\ a < 7 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 6 \\ a < 7 \end{cases} \end{aligned}$$

であるが、仮定より $6 < a$ であるから、

$$6 < a < 7$$

である。

以上[1], [2]より、求める a の条件は $6 < a < 7$ である。

(答) $6 < a < 7$

まず, (1)の条件を用いる。 $t=0$ のとき

$$\overrightarrow{\text{OP}}_1 = (0, b, 2\sqrt{3}), \overrightarrow{\text{OP}}_2 = (0, d, 0)$$

であるから,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\text{OP}}_1| &= \sqrt{b^2 + 12}, |\overrightarrow{\text{OP}}_2| = |d| \\ \overrightarrow{\text{OP}}_1 \cdot \overrightarrow{\text{OP}}_2 &= bd \end{aligned}$$

である。また, $\overrightarrow{\text{OP}}_1$ と $\overrightarrow{\text{OP}}_2$ のなす角は $\frac{\pi}{3}$ であるから,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{OP}}_1 \cdot \overrightarrow{\text{OP}}_2 &= |\overrightarrow{\text{OP}}_1| |\overrightarrow{\text{OP}}_2| \cos \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow bd &= \sqrt{b^2 + 12} \cdot |d| \cdot \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 2bd &= \sqrt{b^2 + 12} \cdot |d| \end{aligned}$$

である。ここで, $b < 0$ および $\sqrt{b^2 + 12} > 0$ であることに注意すると, $d < 0$ となることが必要である。この条件のもとで, 両辺を2乗し変形すると,

$$\begin{aligned} 4b^2 d^2 &= (b^2 + 12) d^2 \\ \Leftrightarrow 4b^2 &= b^2 + 12 \quad (\because d \neq 0) \\ \Leftrightarrow b^2 &= 4 \\ \therefore b &= -2 \quad (\because b < 0) \end{aligned}$$

となる。次に, (2)の条件を用いる。 $\overrightarrow{\text{OP}}_1 = (-t, f(t), 2\sqrt{3})$ より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\text{OP}}_1|^2 &= t^2 + \{f(t)\}^2 + (2\sqrt{3})^2 \\ &= t^2 + (at - 2)^2 + 12 \\ &= (a^2 + 1)t^2 - 4at + 16 \\ &= (a^2 + 1) \left(t - \frac{2a}{a^2 + 1} \right)^2 + 16 - \frac{4a^2}{a^2 + 1} \end{aligned}$$

であるから, $t = \frac{2a}{a^2 + 1}$ のときに $|\overrightarrow{\text{OP}}_1|^2$ は最小値をとる。ここで, $|\overrightarrow{\text{OP}}_1|^2$ が最小となるとき $|\overrightarrow{\text{OP}}_1|$

も最小であるから,

$$\begin{aligned} 16 - \frac{4a^2}{a^2 + 1} &= (\sqrt{14})^2 \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{2a^2}{a^2 + 1} \\ \Leftrightarrow a^2 &= 1 \\ \therefore a &= 1 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

となる。最後に, (3)の条件を用いる。 $t=1$ のとき,

$$\overrightarrow{\text{OP}}_0 = (-4, 0, 4\sqrt{3}), \overrightarrow{\text{OP}}_1 = (-1, -1, 2\sqrt{3}), \overrightarrow{\text{OP}}_2 = (1, 1+c+d, 0)$$

である。ここで, O, P₀, P₁, P₂ の4点が同一平面上にあることから, 実数 u, v を用いて

$$\overrightarrow{\text{OP}}_2 = u\overrightarrow{\text{OP}}_0 + v\overrightarrow{\text{OP}}_1$$

と表せる。したがって, 各成分を比較すると

$$\begin{aligned} \begin{cases} 1 = -4u - v \\ 1 + c + d = -v \\ 0 = 4\sqrt{3}u + 2\sqrt{3}v \end{cases} \\ \therefore (u, v) = \left(-\frac{1}{2}, 1 \right) \text{ かつ } c + d = -2 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。一方, $t=-3$ のとき

$$\overrightarrow{\text{OP}}_0 = (-4, 0, 4\sqrt{3}), \overrightarrow{\text{OP}}_1 = (3, -5, 2\sqrt{3}), \overrightarrow{\text{OP}}_2 = (-3, 9-3c+d, 0)$$

となる。O, P₀, P₁, P₂ の4点が同一平面上にあることから, 実数 u', v' を用いて

$$\overrightarrow{\text{OP}}_2 = u'\overrightarrow{\text{OP}}_0 + v'\overrightarrow{\text{OP}}_1$$

と表せる。したがって, 各成分を比較すると

$$\begin{aligned} \begin{cases} -3 = -4u' + 3v' \\ 9 - 3c + d = -5v' \\ 0 = 4\sqrt{3}u' + 2\sqrt{3}v' \end{cases} \\ \therefore (u', v') = \left(\frac{3}{10}, -\frac{3}{5} \right) \text{ かつ } 3c - d = 6 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。①, ②より,

$$\begin{aligned} \begin{cases} c + d = -2 \\ 3c - d = 6 \end{cases} \\ \Leftrightarrow c = 1, d = -3 \end{aligned}$$

となり, これは条件 $d < 0$ を満たす。以上より,

$$a = 1, b = -2, c = 1, d = -3$$

である。

(答) $a = 1, b = -2, c = 1, d = -3$

p, q, r を実数として、

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$$

とおく。まず、

$$3 \text{ 次方程式 } f(x) = 0 \text{ は、実数解を少なくとも1つもつ} \quad \cdots \text{①}$$

ことを示す。 x が十分大きいとき、 $f(x) > 0$ である。同様に、 x が十分小さいとき、 $f(x) < 0$ である。したがって、3次関数 $y = f(x)$ のグラフは x 軸と少なくとも1点を共有する。したがって、①が示された。次に、

$$3 \text{ 次方程式 } f(x) = 0 \text{ が } x = a + bi \text{ (} a, b \text{ は実数, } b \neq 0 \text{) を解にもつとき、}$$

$$\text{その複素共役 } x = a - bi \text{ も } f(x) = 0 \text{ の解である} \quad \cdots \text{②}$$

ことを示す。①より、方程式は少なくとも実数解を1つもつため、それを $x = e$ とおくと、 s, t を実数として

$$f(x) = (x - e)(x^2 + sx + t)$$

と因数分解できる。このとき、 c, d を実数として残りの解を $x = c + di$ とおくと、

$$x^2 + sx + t = \{x - (a + bi)\} \{x - (c + di)\}$$

$$\therefore \begin{cases} s = -(a + c) - (b + d)i \\ t = (ac - bd) + (ad + bc)i \end{cases}$$

となる。 s, t は実数であるから、

$$\begin{cases} b + d = 0 \\ ad + bc = 0 \end{cases} \\ \therefore b = -d, c = a \quad (\because b \neq 0)$$

となるため、残りの解は $x = a - bi$ となる。したがって、②が示された。

ここで、与えられた3つの解をそれぞれ

$$\alpha = (2a + 1)^2 + (a - b)i$$

$$\beta = (2a + 1)^2 + (a^2 + b + 1)i$$

$$\gamma = (2a + 1)^2 + (a^2 + b - 1)i$$

とおく。①より、与えられた方程式は実数解を少なくとも1つもつため、 α, β, γ のうち少なくとも1つは実数である。

[1] α が実数であるとき

このとき、

$$a - b = 0$$

$$\therefore a = b$$

であり、

$$\alpha = (2a + 1)^2, \beta = (2a + 1)^2 + (a^2 + a + 1)i, \gamma = (2a + 1)^2 + (a^2 + a - 1)i$$

となる。ここで、

$$a^2 + a + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

より、 β は虚数である。また、 α は実数であるから、②より

$$\beta = \bar{\gamma}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + a + 1 = -(a^2 + a - 1)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + a = 0$$

$$\Leftrightarrow a(a + 1) = 0$$

$$\therefore a = 0, -1$$

となる。 $a = 0$ のとき、

$$\alpha = 1, \beta = 1 + i, \gamma = 1 - i$$

であるから、3次方程式の解と係数の関係より

$$\begin{cases} p = -(\alpha + \beta + \gamma) = -3 \\ q = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 4 \\ r = -\alpha\beta\gamma = -2 \end{cases}$$

となる。一方 $a = -1$ のとき、同様に

$$\alpha = 1, \beta = 1 + i, \gamma = 1 - i$$

であるから

$$p = -3, q = 4, r = -2$$

となる。

[2] β が実数であるとき

このとき

$$a^2 + b + 1 = 0$$

$$\therefore b = -a^2 - 1$$

であり、これより

$$\alpha = (2a + 1)^2 + (a^2 + a + 1)i, \beta = (2a + 1)^2, \gamma = (2a + 1)^2 - 2i$$

となる。 γ は虚数であり、 β は実数であるから、②より

$$\alpha = \bar{\gamma}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + a + 1 = 2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + a - 1 = 0$$

$$\therefore a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

が成り立つ。ここで、

$$(2a + 1)^2 = (-1 \pm \sqrt{5} + 1)^2 = 5$$

であるから、

$$\alpha = 5 + 2i, \beta = 5, \gamma = 5 - 2i$$

となり、3次方程式の解と係数の関係から

$$p = -15, q = 79, r = -145$$

となる。

[3] γ が実数であるとき

このとき

$$a^2 + b - 1 = 0$$

$$\therefore b = -a^2 + 1$$

であり、これより

$$\alpha = (2a + 1)^2 + (a^2 + a - 1)i, \beta = (2a + 1)^2 + 2i, \gamma = (2a + 1)^2$$

となる。 γ は実数であり、 β は虚数であるから、②より

$$\alpha = \bar{\beta}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + a - 1 = -2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + a + 1 = 0$$

$$\therefore a = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

となるが、与えられた条件より a は実数であるから、不適である。

以上[1]から[3]より、

$$(p, q, r) = (-3, 4, -2), (-15, 79, -145)$$

となる。

(答) $(p, q, r) = (-3, 4, -2), (-15, 79, -145)$

$f(x)$ は2次関数であるから、 $F(x)$ は3次関数である。3次方程式 $F(x)=0$ の最大の解を $x=\alpha$ ($\alpha>0$) とおくと、条件より最小の解は $x=-\alpha$ である。また、残りの解を $-\alpha<\beta<\alpha$ を満たす実数 β を用いて $x=\beta$ とおく。このとき、0でない実数 a を用いて

$$\begin{aligned} F(x) &= a(x-\alpha)(x+\alpha)(x-\beta) \\ &= a(x^3 - \beta x^2 - \alpha^2 x + \alpha^2 \beta) \end{aligned}$$

と表せる。ここで、与えられた条件より

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

であるから、両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x) \\ \Leftrightarrow f(x) &= a(3x^2 - 2\beta x - \alpha^2) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $f(x)=0$ の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (a\beta)^2 - 3a \cdot (-a\alpha^2) \\ &= a^2(\beta^2 + 3\alpha^2) \\ &> 0 \quad (\because a \neq 0, \alpha > 0) \end{aligned}$$

となる。以上より、2次方程式 $f(x)=0$ は異なる2つの実数解をもつ。

(証明終)