

(1)

a, b がともに偶数であるから、整数 m, n を用いて

$$\begin{aligned} a &= 2m \\ b &= 2n \end{aligned}$$

と表せる。したがって、 $a+b$ は

$$\begin{aligned} a+b &= 2m+2n \\ &= 2(m+n) \end{aligned}$$

となる。 $m+n$ は整数であるから、 $a+b$ は偶数となることが示された。

(証明終)

(2)

a, b がともに奇数であるから、整数 m, n を用いて

$$\begin{aligned} a &= 2m+1 \\ b &= 2n+1 \end{aligned}$$

と表せる。したがって、 ab は

$$\begin{aligned} ab &= (2m+1)(2n+1) \\ &= 2(2mn+m+n)+1 \end{aligned}$$

となる。 $2mn+m+n$ は整数であるから、 $2(2mn+m+n)$ は偶数である。したがって、 ab は奇数となることが示された。

(証明終)

(3)

a, b のうち少なくとも一方が偶数である $\dots\dots$ ①

ab が偶数である $\dots\dots$ ②

について、まず、①が成り立つとき②が成り立つことを示す。 a, b のうち少なくとも一方が偶数であるとき、 a を偶数としても一般性を失わない。整数 m を用いて $a=2m$ と置くと、 ab は

$$ab = 2(mb)$$

と計算できる。 mb は整数であるから、 ab は偶数である。次に②が成り立つとき①が成り立つことを示す。 ab が偶数の時、整数 n を用いて $ab=2n$ と置くと、 ab は 2 を素因数に持つことから、 a, b のうち少なくとも一方は 2 を素因数に持つ。したがって、 a, b のうち少なくとも一方は偶数となる。以上より、①と②は同値であることが示された。

(証明終)

(4)

ab が偶数であるから、(3)の結果より a, b のうち少なくとも一方が偶数である。 a を偶数としても一般性を失わないことから整数 m を用いて $a=2m$ と置く。また、整数 n を用いて $a+b=2n$ と表すと、

$$\begin{aligned} a+b &= 2n \\ \Leftrightarrow 2m+b &= 2n \\ \Leftrightarrow b &= 2(n-m) \end{aligned}$$

が得られる。 $n-m$ は整数であるから、 b は偶数となる。したがって、 a, b はどちらも偶数であることが示された。

(証明終)

(5)

ab, c と 2 つに分けて考えると、 abc が偶数であるから、(3)の結果より ab, c のうち一方は偶数である。以下、 c の偶奇で場合分けして考える。

[1] c が偶数のとき

$$\begin{aligned} ab+bc+ca &\text{ を変形すると,} \\ ab+bc+ca &= ab+c(a+b) \end{aligned}$$

と表せる。 c が偶数であることより $c(a+b)$ は偶数となるため、 $ab+bc+ca$ も偶数であるとき ab は偶数となる。また、 $a+b+c$ が偶数であるとき、 c が偶数であることより $a+b$ は偶数となる。したがって、 $ab, a+b$ がともに偶数であることから、(4)の結果より a, b はともに偶数である。以上より、 a, b, c はすべて偶数となる。

[2] c が奇数のとき

$$\begin{aligned} (3) \text{の結果より } ab &\text{ は偶数となる。} \\ ab+bc+ca &\text{ について考えると,} \\ ab+bc+ca &= ab+c(a+b) \end{aligned}$$

と表せる。 $ab+bc+ca$ と ab が偶数であることから $c(a+b)$ は偶数であり、 c が奇数だから(3)の結果より $a+b$ は偶数となる。 $ab, a+b$ がともに偶数であるから、(4)の結果より a, b はどちらも偶数である。ここで、 a, b が偶数であり、 c が奇数であるから、整数 m, n, l を用いて

$$\begin{aligned} a &= 2m \\ b &= 2n \\ c &= 2l+1 \end{aligned}$$

と表せる。 $a+b+c$ を計算すると、

$$a+b+c = 2(m+n+l)+1$$

となる。 $m+n+l$ は整数であるから $a+b+c$ は奇数となるが、これは $a+b+c$ が偶数であることと反する。

以上より、 a, b, c はすべて偶数であることが示された。

(証明終)

(1)

$$f(x) = \frac{3^x - 1}{3^x + 1}$$

$$g(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{2(x^2 + x + 1)}$$

より,

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \frac{\left(\frac{3^x - 1}{3^x + 1}\right)^2 + 4\left(\frac{3^x - 1}{3^x + 1}\right) + 1}{2\left\{\left(\frac{3^x - 1}{3^x + 1}\right)^2 + \left(\frac{3^x - 1}{3^x + 1}\right) + 1\right\}} \\ &= \frac{(3^x - 1)^2 + 4(3^x - 1)(3^x + 1) + (3^x + 1)^2}{2\{(3^x - 1)^2 + (3^x - 1)(3^x + 1) + (3^x + 1)^2\}} \\ &= \frac{6 \cdot 3^{2x} - 2}{2(3 \cdot 3^{2x} + 1)} \\ &= \frac{3^{2x+1} - 1}{3^{2x+1} + 1} \\ &= f(2x + 1) \end{aligned}$$

となり, 題意が示された。

(証明終)

(2)

(ア)

数学的帰納法により

$$b_n = f(a_n)$$

となることを証明する。

[1] $n=1$ のとき

$$\begin{aligned} f(a_1) &= f(1) \\ &= \frac{3^1 - 1}{3^1 + 1} \\ &= \frac{1}{2} \\ &= b_1 \end{aligned}$$

より成り立つ。

[2] $n=k$ (k は自然数) のとき成り立つと仮定する。このとき, (1) の結果を用いると

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= g(b_k) \\ &= g(f(a_k)) \\ &= f(2a_k + 1) \\ &= f(a_{k+1}) \end{aligned}$$

が得られる。したがって, $b_{k+1} = f(a_{k+1})$ となり $n=k+1$ のときも成り立つ。以上[1], [2]より, 数学的帰納法により $b_n = f(a_n)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) となることが示された。

(証明終)

(イ)

数列 $\{a_n\}$ の式は,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + 1 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} + 1 &= 2(a_n + 1) \end{aligned}$$

と変形される。数列 $\{a_n + 1\}$ は, 初項 $a_1 + 1 = 2$, 公比 2 の等比数列であるから,

$$\begin{aligned} a_n + 1 &= 2 \cdot 2^{n-1} \\ \Leftrightarrow a_n &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

となる。(ア)より $b_n = f(a_n)$ であるから, 数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} b_n &= f(2^n - 1) \\ &= \frac{3^{2^n - 1} - 1}{3^{2^n - 1} + 1} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = 2^n - 1, b_n = \frac{3^{2^n - 1} - 1}{3^{2^n - 1} + 1}$$

(ウ)

 $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n - 1) = \infty$ であるから, (イ) の結果より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2^n - 1} - 1}{3^{2^n - 1} + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-2}{3^{2^n - 1} + 1} + 1 \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$$

3

(1)

$f(x)$ を x について微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(x^2+3x+1)-e^x(2x+3)}{(x^2+3x+1)^2} \\ &= \frac{e^x(x^2+x-2)}{(x^2+3x+1)^2} \\ &= \frac{e^x(x+2)(x-1)}{(x^2+3x+1)^2} \end{aligned}$$

が得られる。したがって、 $x>0$ の範囲で $f(x)$ の増減表を書くと以下ようになる。

x	(0)	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	(1)	$\searrow$	$\frac{e}{5}$	$\nearrow$

以上より、 $f(x)$ は $x=1$ で最小値 $\frac{e}{5}$ をとる。

(答) $x=1, f(1)=\frac{e}{5}$

(2)

(ア)

曲線 C と直線 l_1 の交点の x 座標は、 $x>0$ であることに注意して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= 2e^ax \\ \therefore x &= \frac{1}{\sqrt{2e^a}} \quad (\because x>0) \end{aligned}$$

となる。したがって、交点の座標は $\left(\frac{1}{\sqrt{2e^a}}, \sqrt{2e^a}\right)$ となる。同様に、曲線 C と直線 l_2 の交点は $x>0, a>0$ であることに注意して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= (a^2+3a+1)x \\ \therefore x &= \frac{1}{\sqrt{a^2+3a+1}} \quad (x>0) \end{aligned}$$

となる。したがって、交点の座標は $\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+3a+1}}, \sqrt{a^2+3a+1}\right)$ となる。

(答) C と l_1 の交点: $\left(\frac{1}{\sqrt{2e^a}}, \sqrt{2e^a}\right)$
 C と l_2 の交点: $\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+3a+1}}, \sqrt{a^2+3a+1}\right)$

(イ)

(1)の結果より、 $a>0$ において

$$\frac{e^a}{a^2+3a+1} \geq \frac{e}{5}$$

が成立する。ここで $\frac{e}{5}$ は $e=2.7182\dots$ であるから、

$$\frac{e}{5} > \frac{2.5}{5} \left(= \frac{1}{2}\right)$$

が成立する。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{e^a}{a^2+3a+1} &> \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 2e^a &> a^2+3a+1 \end{aligned}$$

の成立が示された。

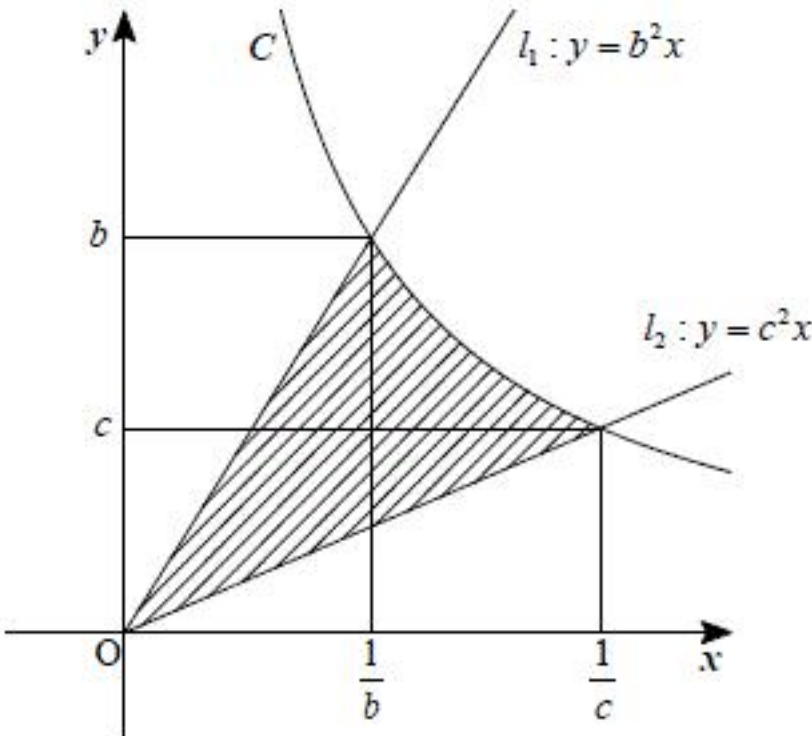
(証明終)

(ウ)

以下、実数 b, c を用いて、

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{2e^a} \\ c &= \sqrt{a^2+3a+1} \end{aligned}$$

と表す。(ア)と(イ)の結果より、曲線 C と直線 l_1, l_2 を図示すると以下ようになる。



以上より、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{b}} (b^2x - c^2x) dx + \int_{\frac{1}{c}}^{\frac{1}{b}} \left(\frac{1}{x} - c^2x \right) dx &= \int_0^{\frac{1}{b}} b^2x dx - \int_0^{\frac{1}{c}} c^2x dx + \int_{\frac{1}{c}}^{\frac{1}{b}} \frac{dx}{x} \\ &= \left[\frac{b^2}{2} x^2 \right]_0^{\frac{1}{b}} - \left[\frac{c^2}{2} x^2 \right]_0^{\frac{1}{c}} + \left[\log|x| \right]_{\frac{1}{c}}^{\frac{1}{b}} \\ &= \log \frac{1}{c} - \log \frac{1}{b} \\ &= \log \frac{b}{c} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{2e^a}{a^2+3a+1} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2} \log \frac{2e^a}{a^2+3a+1}$

(エ)

(1)の結果より $a>0$ において $\frac{e^a}{a^2+3a+1}$ は $a=1$ で最小値 $\frac{e}{5}$ をとる。したがって、 D の面積の最小値は $\frac{1}{2} \log \frac{2e}{5}$ となる。

(答) $a=1, D$ の面積: $\frac{1}{2} \log \frac{2e}{5}$

4

(1)

与えられた条件より

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} &= |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} \\ \vec{c} \cdot \vec{a} &= |\vec{c}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos \theta \\ &= \cos \theta\end{aligned}$$

となる。よって、 $\overrightarrow{\text{BA}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}}$ を計算すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{BA}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{b}|^2 \\ &= \cos \theta - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 \\ &= \cos \theta\end{aligned}$$

が得られる。

(答) $\cos \theta$

(2)

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\text{BA}}|^2 &= |\vec{a} - \vec{b}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 1 \\ |\overrightarrow{\text{BC}}|^2 &= |\vec{c} - \vec{b}|^2 \\ &= |\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 \\ &= 1\end{aligned}$$

より、 $|\overrightarrow{\text{BA}}| = 1$ 、 $|\overrightarrow{\text{BC}}| = 1$ であるから、求める面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{\text{BA}}|^2 \cdot |\overrightarrow{\text{BC}}|^2 - (\overrightarrow{\text{BA}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}})^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{2} \sin \theta \left(\because 0 < \theta < \frac{2}{3} \pi \right)\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2} \sin \theta$

(3)

点 H は平面 ABC 上の点より

$$s + t + u = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。 $\overrightarrow{\text{OH}}$ は平面 ABC と垂直に交わるから、 $\overrightarrow{\text{OH}} \cdot \overrightarrow{\text{BA}} = 0$ である。これを变形すると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OH}} \cdot \overrightarrow{\text{BA}} &= 0 \\ \Leftrightarrow (s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) &= 0 \\ \Leftrightarrow s - t + (2\cos \theta - 1)u &= 0 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

が得られる。同様に、 $\overrightarrow{\text{OH}}$ は平面 ABC と垂直に交わるから、 $\overrightarrow{\text{OH}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} = 0$ である。これを变形すると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OH}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} &= 0 \\ \Leftrightarrow (s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2\cos \theta - 1)s - t + u &= 0 \quad \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

が得られる。①、②、③を連立して解くと、

$$s = u = \frac{1}{2(1 + \cos \theta)}, t = \frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

が得られる。

(答) $s = \frac{1}{2(1 + \cos \theta)}, t = \frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta}, u = \frac{1}{2(1 + \cos \theta)}$

(4)

(3)の結果より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OH}} &= s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c} \\ &= \frac{1}{2(1 + \cos \theta)} \{ \vec{a} + (2\cos \theta)\vec{b} + \vec{c} \}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\text{OH}}|^2 &= \frac{1}{4(1 + \cos \theta)^2} |\vec{a} + (2\cos \theta)\vec{b} + \vec{c}|^2 \\ &= \frac{1}{4(1 + \cos \theta)^2} \left\{ |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 \cos^2 \theta + |\vec{c}|^2 + 4\cos \theta \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) + 4\cos \theta \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) + 2\vec{c} \cdot \vec{a} \right\} \\ &= \frac{1}{4(1 + \cos \theta)^2} \cdot (4\cos^2 \theta + 6\cos \theta + 2) \\ &= \frac{1}{4(1 + \cos \theta)^2} \cdot 2(2\cos \theta + 1)(\cos \theta + 1) \\ &= \frac{1 + 2\cos \theta}{2(1 + \cos \theta)} \\ \therefore |\overrightarrow{\text{OH}}| &= \sqrt{\frac{1 + 2\cos \theta}{2(1 + \cos \theta)}} \left(\because 0 < \theta < \frac{2}{3} \pi \right)\end{aligned}$$

となる。

(答) $|\overrightarrow{\text{OH}}| = \sqrt{\frac{1 + 2\cos \theta}{2(1 + \cos \theta)}}$

(5)

(2)と(4)の結果より四面体 OABC の体積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \sin \theta \cdot \sqrt{\frac{1 + 2\cos \theta}{2(1 + \cos \theta)}} &= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1 + 2\cos \theta}{2(1 + \cos \theta)}} \cdot \sin^2 \theta \\ &= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1 + 2\cos \theta}{2(1 + \cos \theta)}} \cdot (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{(1 + 2\cos \theta)(1 - \cos \theta)}{2}} \\ &= \frac{1}{6} \sqrt{-\cos^2 \theta + \frac{1}{2}\cos \theta + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{6} \sqrt{-\left(\cos \theta - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{16}}\end{aligned}$$

となる。 $0 < \theta < \frac{2}{3} \pi$ のとき $-\frac{1}{2} < \cos \theta < 1$ であることから、四面体 OABC の体積は $\cos \theta = \frac{1}{4}$ の

とき最大値を取り、その値は

$$\frac{1}{6} \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{1}{8}$$

である。

(答) $\frac{1}{8}$