

数 学

(理学部 数学科)

(平成 28 年度)【前期日程】

問題冊子 1～4 ページ 答案用紙 4 枚

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけない。
2. 配布された用紙に、枚数の不足や印刷不鮮明な箇所がある場合には申し出ること。
3. 受験番号は、答案用紙 1 枚ごとに所定の欄 2 箇所に必ず記入すること。記入を忘れたり、誤った番号を記入したときは採点されないことがある。
4. 解答は必ず答案用紙の指定された箇所へ記入すること。やむをえず裏面にまで解答が及ぶ場合には、その旨を明記し、かつ、受験番号等を記入する部分(上部、右部分)の裏には記入しないこと。
5. 試験が終了したら、4 枚の答案用紙を上から(その 1)、(その 2)、(その 3)、(その 4)の順になるように机上におくこと。
6. 退場するときは、問題冊子を持ち帰ること。

試験問題は、次ページからです。

1

a, b, c は整数とする。次の問いに答えよ。

- (1) a, b がともに偶数ならば, $a+b$ は偶数であることを示せ。
- (2) a, b がともに奇数ならば, ab は奇数であることを示せ。
- (3) a, b のうち少なくとも一方が偶数であることと, ab が偶数であることは同値であることを示せ。
- (4) $ab, a+b$ がともに偶数ならば, a, b はどちらも偶数であることを示せ。
- (5) $abc, ab+bc+ca, a+b+c$ がすべて偶数ならば, a, b, c はすべて偶数であることを示せ。

2

$f(x) = \frac{3^x - 1}{3^x + 1}$, $g(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{2(x^2 + x + 1)}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $g(f(x)) = f(2x + 1)$ が成り立つことを示せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定め、数列 $\{b_n\}$ を

$$b_1 = \frac{1}{2}, \quad b_{n+1} = g(b_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。

(ア) $b_n = f(a_n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ。

(イ) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

(ウ) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。

次の問いに答えよ。

(1) $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 3x + 1}$ とする。 $x > 0$ の範囲で $f(x)$ が最小になる x の値と、そのときの $f(x)$ の値を求めよ。

(2) $a > 0$ とする。曲線 $C: y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) と 2 つの直線 $\ell_1: y = 2e^a x$, $\ell_2: y = (a^2 + 3a + 1)x$ を考える。 C と ℓ_1 と ℓ_2 で囲まれる部分を D とする。

(ア) C と ℓ_1 の交点、および、 C と ℓ_2 の交点の座標を求めよ。

(イ) (1) を用いて $2e^a > a^2 + 3a + 1$ であることを示せ。ただし、 $e = 2.7182\cdots$ であることは用いてよい。

(ウ) D の面積を a を用いて表せ。

(エ) D の面積を最小にする a の値と、そのときの D の面積を求めよ。

4

四面体 $OABC$ において, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とし, 頂点 O から $\triangle ABC$ を含む平面に下ろした垂線の足を H とする。また, 四面体 $OABC$ は

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \quad \angle AOB = \angle BOC = \frac{\pi}{3}$$

を満たすものとし, $\angle AOC = \theta$ ($0 < \theta < \frac{2}{3}\pi$) とする。次の問いに答えよ。

- (1) 内積 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ を求めよ。
- (2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。
- (3) $\overrightarrow{OH} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$ を満たす s, t, u を求めよ。
- (4) $|\overrightarrow{OH}|$ を求めよ。
- (5) $0 < \theta < \frac{2}{3}\pi$ のとき, 四面体 $OABC$ の体積の最大値を求めよ。