

$$S_1 = \frac{3}{4}\pi \times 2\pi = \frac{3}{2}\pi^2$$

となる。また、領域 B を表す不等式について

$$\begin{aligned} 2\sin^2 x + (\sin y - \cos y)\sin x &\geq (\cos y - \sin y)\cos x + 1 \\ \Leftrightarrow (\sin y - \cos y)(\sin x + \cos x) + 2\sin^2 x - 1 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (\sin y - \cos y)(\sin x + \cos x) + \sin^2 x - \cos^2 x &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (\sin y - \cos y)(\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \{(\sin y - \cos y) + (\sin x - \cos x)\}(\sin x + \cos x) &\geq 0 \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

であり、領域 B 内の点は $0 \leq x \leq \frac{3}{4}\pi$ を満たすので、 $\frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \pi$ となるから

$$\sin x + \cos x \geq 0$$

であり、等号は $x = \frac{3}{4}\pi$ のときに成立する。よって①式は

$$x = \frac{3}{4}\pi \text{ または } (\sin y - \cos y) + (\sin x - \cos x) \geq 0 \cdots \textcircled{2}$$

となる。ここで

$$(\sin y - \cos y) + (\sin x - \cos x) = \sqrt{2} \sin\left(y - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

となり、和積公式を用いると

$$\begin{aligned} \sin\left(y - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= 2 \sin\left(\frac{y - \frac{\pi}{4} + x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cos\left(\frac{y - \frac{\pi}{4} - (x - \frac{\pi}{4})}{2}\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{y+x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{y-x}{2}\right) \end{aligned}$$

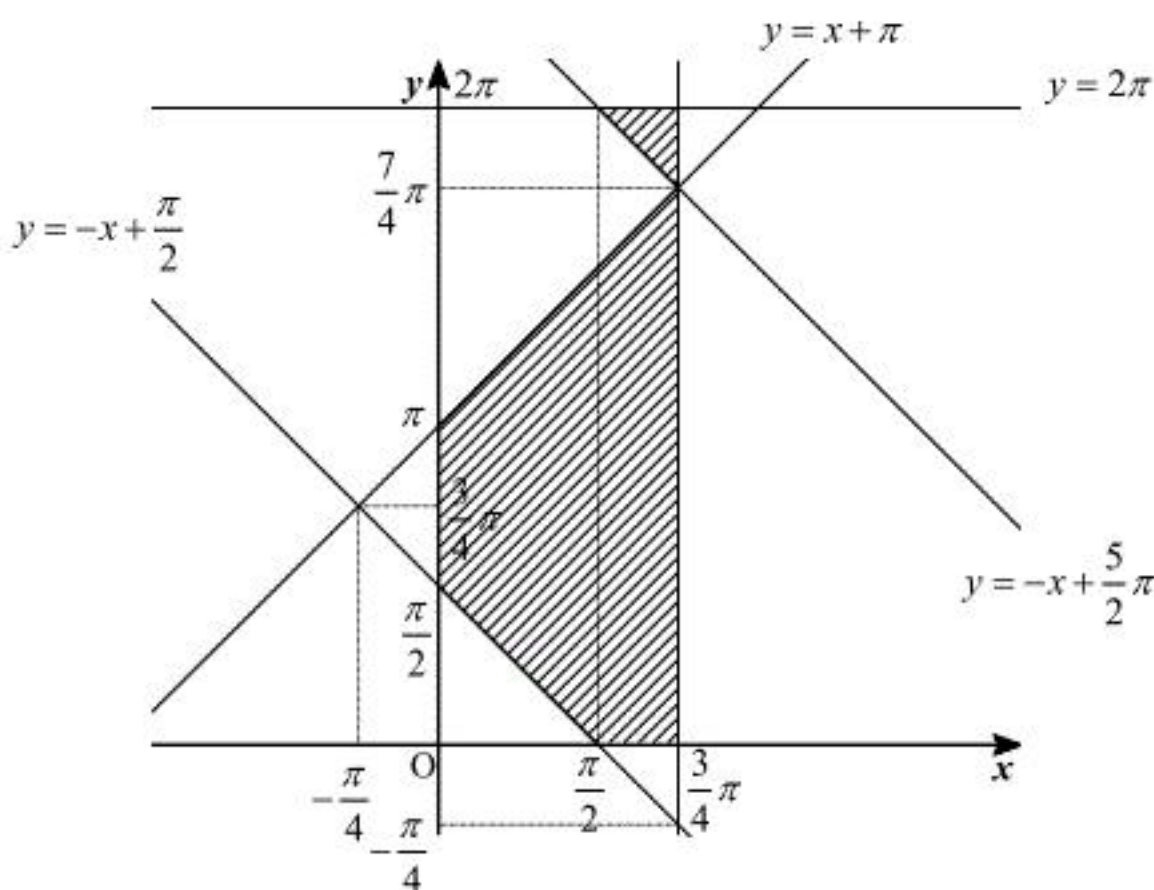
となるから

$$\begin{aligned} (\sin y - \cos y) + (\sin x - \cos x) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \sin\left(\frac{y+x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{y-x}{2}\right) &\geq 0 \end{aligned}$$

となる。ここで整数 n_1, n_2 を用いると

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{y+x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{y+x}{2} - \frac{\pi}{4} &= n_1\pi \\ \Leftrightarrow y+x &= 2n_1\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos\left(\frac{y-x}{2}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{y-x}{2} &= n_2\pi + \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow y-x &= 2n_2\pi + \pi \end{aligned}$$

となるから、②式より領域 B は下図斜線部のようになる。



よって領域 B の面積は

$$S_2 = \frac{1}{2} \times 2\pi \times \left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} \times \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) \times \frac{\pi}{4} = \frac{15}{16}\pi^2$$

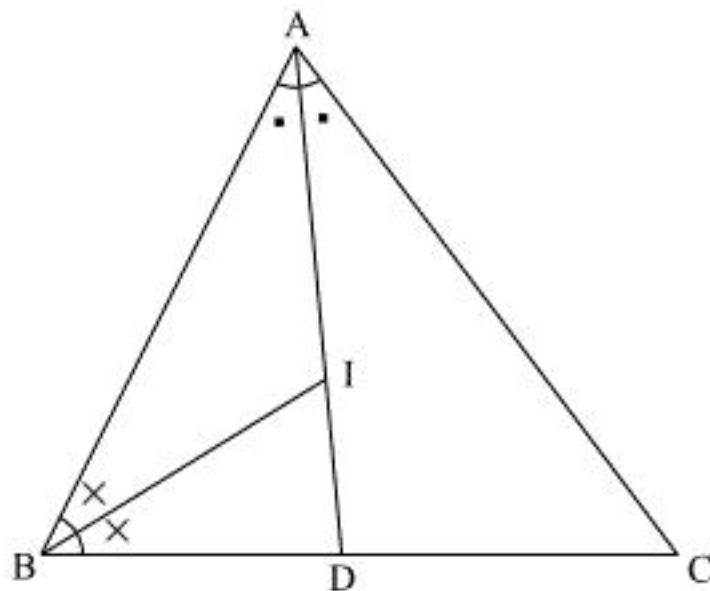
となるから

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{5}{8}$$

となる。

(答) $\frac{S_2}{S_1} = \frac{5}{8}$

(1)



直線 AI と辺 BC の交点を D とする。点 I は $\triangle ABC$ の内心であるから、

$$\angle BAD = \angle CAD \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\angle ABI = \angle CBI \quad \dots \textcircled{2}$$

である。①より、

$$BD : CD = AB : AC = c : b$$

であるから、

$$\overrightarrow{AD} = \frac{b}{b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c} \overrightarrow{AC}$$

と表せる。また、

$$BD = \frac{ca}{b+c}$$

である。次に②より、

$$AI : DI = BA : BD = c : \frac{ca}{b+c} = (b+c) : a$$

であるから、

$$\overrightarrow{AI} = \frac{b+c}{a+b+c} \overrightarrow{AD} = \frac{b}{a+b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c} \overrightarrow{AC}$$

と表せる。したがって、実数 r, s を用いて

$$\overrightarrow{AI} = r \overrightarrow{AB} + s \overrightarrow{AC}$$

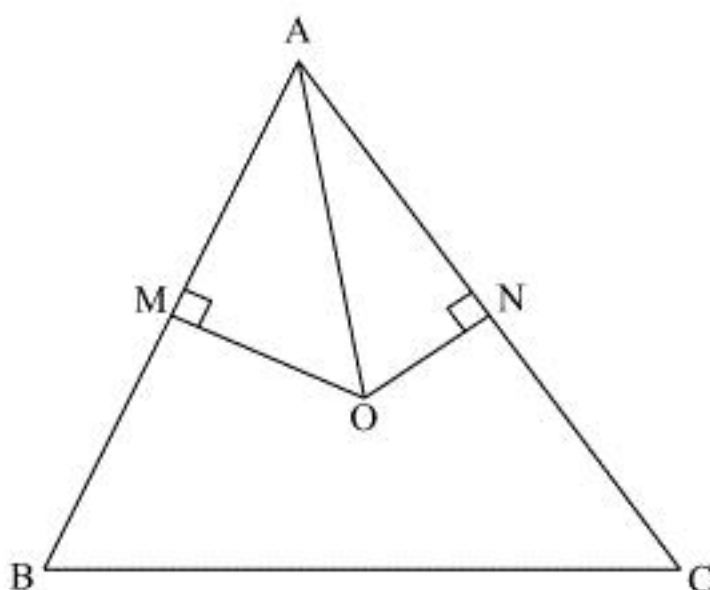
とおくと、 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ は 1 次独立であるから、

$$\begin{cases} r = \frac{b}{a+b+c} \\ s = \frac{c}{a+b+c} \end{cases}$$

である。

$$\text{(答)} \quad r = \frac{b}{a+b+c}, s = \frac{c}{a+b+c}$$

(2)



$$\angle BAC = \frac{\pi}{3} \text{ より、}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} bc$$

である。辺 AB, AC の中点をそれぞれ M, N とおくと、点 O は $\triangle ABC$ の外心であるから、

$$AB \perp MO, AC \perp NO$$

が成り立つ。よって、実数 t, u を用いて $\overrightarrow{AO} = t \overrightarrow{AB} + u \overrightarrow{AC}$ とおくと、

$$AB \perp MO$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MO} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AM}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \left\{ \left(t - \frac{1}{2} \right) \overrightarrow{AB} + u \overrightarrow{AC} \right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow c^2 \left(t - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} bcu = 0$$

$$\Leftrightarrow 2ct + bu = c \quad (\because c \neq 0) \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。また、

$$AC \perp NO$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{NO} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AN}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \left\{ t \overrightarrow{AB} + \left(u - \frac{1}{2} \right) \overrightarrow{AC} \right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} bct + \left(u - \frac{1}{2} \right) b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow ct + 2bu = b \quad (\because b \neq 0) \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。③ $\times 2 -$ ④ より、

$$3ct = 2c - b$$

$$\therefore t = \frac{2c-b}{3c} \quad (\because c \neq 0)$$

である。これを③に代入すると、

$$\frac{2(2c-b)}{3} + bu = c$$

$$\Leftrightarrow bu = \frac{2b-c}{3}$$

$$\therefore u = \frac{2b-c}{3b} \quad (\because b \neq 0)$$

である。

$$\text{(答)} \quad t = \frac{2c-b}{3c}, u = \frac{2b-c}{3b}$$

4つの目について、特に

$$a \leq b \leq c \leq d \quad \cdots \textcircled{1}$$

の場合を考える。このとき、平均値と中央値はそれぞれ $\frac{a+b+c+d}{4}, \frac{b+c}{2}$ であるから、これらが等しくなる必要十分条件は、

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c+d}{4} &= \frac{b+c}{2} \\ \Leftrightarrow a+d &= b+c \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。

(1)

4つの目について、特に

$$a < b < c < d \quad \cdots \textcircled{3}$$

の場合を考える。このような目の組み合わせは

$${}_6C_4 = 15 \text{ (通り)}$$

存在する。 $2 \leq b < c \leq 5$ より、 $\textcircled{2}$ が成立する (b, c) の候補は

$$(b, c) = (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)$$

である。よって、 $\textcircled{2}$ かつ $\textcircled{3}$ が成立する (a, b, c, d) の組み合わせは、

$$\begin{aligned} (a, b, c, d) &= (1, 2, 3, 4), (1, 2, 4, 5), (1, 2, 5, 6), (1, 3, 4, 6), \\ &\quad (2, 3, 4, 5), (2, 3, 5, 6), (3, 4, 5, 6) \end{aligned}$$

の7通りである。 $\textcircled{3}$ 以外に (a, b, c, d) が順不同である場合を考えると、求める条件付き確率は

$$\frac{7 \cdot 4!}{15 \cdot 4!} = \frac{7}{15}$$

である。

(答) $\frac{7}{15}$

(2)

$a \leq b \leq c \leq d$ が成り立つとき、

$$a = b < c < d, a = b = c < d \text{ のとき, } a + d > b + c$$

$$a < b < c = d, a < b = c = d \text{ のとき, } a + d < b + c$$

であるから、これらは $\textcircled{2}$ に反するため不適である。したがって、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ を満たす (a, b, c, d) の組み合わせを考えると、以下のような場合分けを行うことができる。

[1] $a < b < c < d$ のとき

(1)より、 (a, b, c, d) の組み合わせは7通りである。 (a, b, c, d) を順不同とすると、組み合わせの総数は

$$7 \cdot 4! = 168 \text{ (通り)}$$

である。

[2] $a = b < c = d$ のとき

$\textcircled{2}$ が成立する (b, c) の候補は

$${}_6C_2 = 15$$

通りであるから、 (a, b, c, d) の組み合わせは15通りである。 (a, b, c, d) を順不同とすると、組み合わせの総数は

$$15 \cdot \frac{4!}{2!2!} = 90 \text{ (通り)}$$

である。

[3] $a < b = c < d$ のとき

$\textcircled{2}$ が成立する (b, c) の候補は

$$(b, c) = (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)$$

であるから、 (a, b, c, d) の組み合わせは

$$\begin{aligned} (a, b, c, d) &= (1, 2, 2, 3), (1, 3, 3, 5), (2, 3, 3, 4), (2, 4, 4, 6), \\ &\quad (3, 4, 4, 5), (4, 5, 5, 6) \end{aligned}$$

の6通りである。 (a, b, c, d) を順不同とすると、組み合わせの総数は

$$6 \cdot \frac{4!}{2!} = 72 \text{ (通り)}$$

である。

[4] $a = b = c = d$ のとき

(a, b, c, d) の組み合わせは

$$\begin{aligned} (a, b, c, d) &= (1, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 2), (3, 3, 3, 3), (4, 4, 4, 4), \\ &\quad (5, 5, 5, 5), (6, 6, 6, 6) \end{aligned}$$

の6通りである。

以上[1], [2], [3], [4]より、求める確率は

$$\frac{168 + 90 + 72 + 6}{6^4} = \frac{7}{27}$$

である。

(答) $\frac{7}{27}$

放物線を軸が y 軸と平行になるように xy 平面上におくと、この放物線の式は、2 次関数

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

で表わせるが、この式を平方完成することで

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \Leftrightarrow y + \left(\frac{b^2}{4a} - c \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

と変形できるため、これを x 軸方向に $\frac{b}{2a}$ 、 y 軸方向に $\frac{b^2}{4a} - c$ だけ平行移動すれば、放物線

$$y = ax^2$$

と一致することがわかる。また、直線を平行移動しても直線である。したがって、放物線 $y = ax^2$ 上の異なる 2 個の点での接線が直交しているとき、接線の交点の軌跡が直線となることを示せば十分であることがわかる。

異なる 2 つの実数 s, t ($s \neq t$) を用いて、放物線 $y = ax^2$ 上の点 $S(s, as^2)$ 、 $T(t, at^2)$ をおく。こ

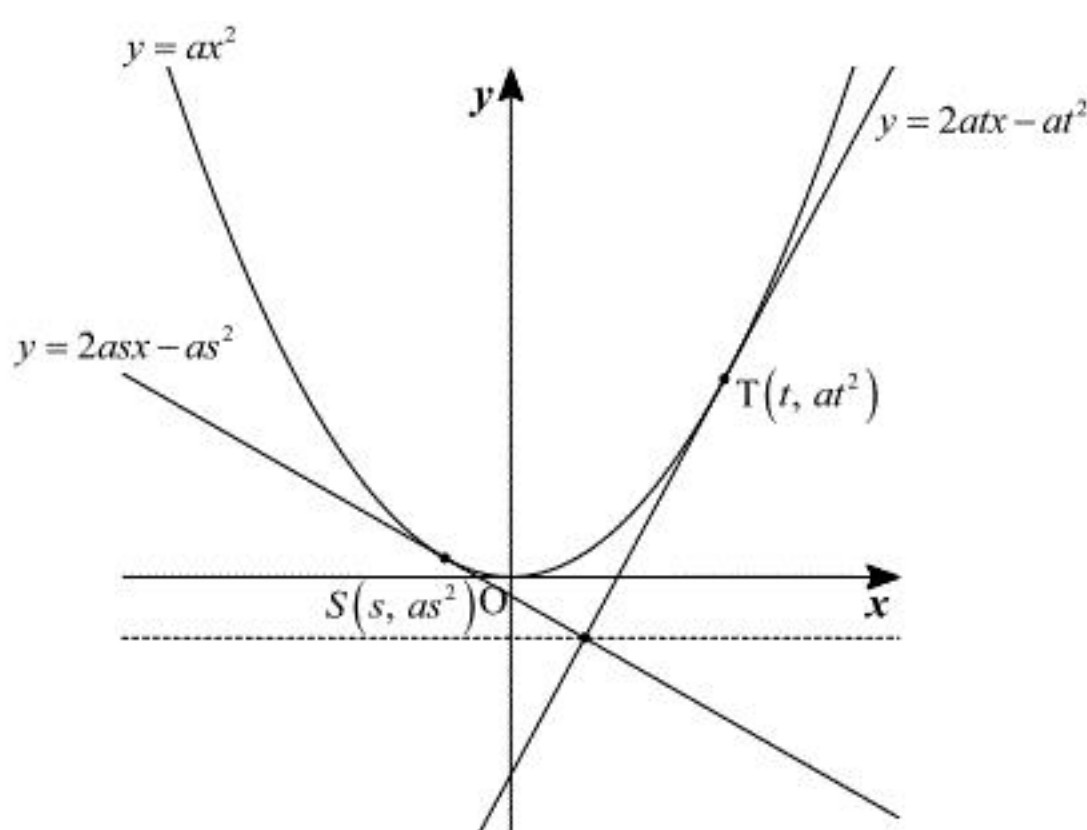
こで、 $y = ax^2$ の導関数は

$$y' = 2ax$$

であるから、各点を接点とする放物線の接線の方程式は

$$\begin{cases} y = 2as(x-s) + as^2 \\ y = 2at(x-t) + at^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2asx - as^2 \\ y = 2atx - at^2 \end{cases}$$

となる。



さて、これらが直交するための必要十分条件は、各直線の傾きに注目することで

$$2as \cdot 2at = -1 \Leftrightarrow st = -\frac{1}{4a^2} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また、これらの交点は、2 つの直線の式を連立することで

$$\begin{cases} y = 2asx - as^2 \\ 2asx - as^2 = 2atx - at^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2asx - as^2 \\ 2a(s-t)x = a(s^2 - t^2) \end{cases}$$

$$\therefore (x, y) = \left(\frac{s+t}{2}, ast \right) \quad (\because a \neq 0, s \neq t) \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。よって、異なる 2 つの接線の交点の軌跡を C とおくと、①、②より

$$(x, y) \in C \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{s+t}{2} \\ y = ast \\ st = -\frac{1}{4a^2} \end{cases} \quad \text{を満たす実数 } s, t (s \neq t) \text{ が存在する}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (s+t, st) = \left(2x, -\frac{1}{4a^2} \right) \\ y = -\frac{1}{4a} \end{cases} \quad \text{を満たす実数 } s, t (s \neq t) \text{ が存在する}$$

$$\Leftrightarrow \text{2 次方程式 } X^2 - 2xX - \frac{1}{4a^2} = 0 \text{ が異なる 2 つの実数解を持つ かつ}$$

$$y = -\frac{1}{4a}$$

$$\Leftrightarrow (-2x)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{4a^2} \right) > 0 \quad \text{かつ} \quad y = -\frac{1}{4a}$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{4a}$$

と同値変形できるから、軌跡 C を表す方程式は $y = -\frac{1}{4a}$ であることがわかり、これは直線を

表す。したがって、放物線上の異なる 2 個の点での接線が直交しているとき、接線の交点の軌跡が直線となることが示された。

(証明終)