

(1)

加法定理より

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

であり、2式を足すと

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

を得る。上式に $\alpha = (n+1)\theta$, $\beta = \theta$ を代入すると

$$\cos(n+2)\theta + \cos n\theta = 2 \cos(n+1)\theta \cos \theta = 2 \cos \theta \cos(n+1)\theta$$

となるから、題意は示された。

(証明終)

(2)

倍角の公式より

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

となるから、

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

となる。また、三倍角の公式より

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

となるから、

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

となる。

$$(\text{答}) \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

(3)

数学的帰納法を利用して、題意が成り立つことを示す。

 $n=1$ のとき、

$$T_1(\cos \theta) = \cos \theta$$

$$\therefore T_1(x) = x$$

となり成り立つ。(2)の結果を用いると、 $n=2, 3$ の場合も成り立つ。ここで $n=k, k+1$ (k は自然数) のとき題意が成り立つとすると、(1)の結果を用いて

$$\begin{aligned} \cos(k+2)\theta &= 2 \cos \theta \cos(k+1)\theta - \cos k\theta \\ &= 2 \cos \theta T_{k+1}(\cos \theta) - T_k(\cos \theta) \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$T_{k+2}(\cos \theta) = 2 \cos \theta T_{k+1}(\cos \theta) - T_k(\cos \theta)$$

とすれば、仮定より $T_{k+2}(\cos \theta)$ は整数係数の $(k+2)$ 次の整式である。よって $n=k+2$ でも題意が成り立つことが示された。以上より、すべての自然数 n に対し題意が成り立つことが示された。

(証明終)

(4)

背理法を利用して、 $\cos \frac{\pi}{4k}$ が無理数であることを示す。すなわち、 $\cos \frac{\pi}{4k}$ を有理数と仮定して矛盾を導く。 $\theta = \frac{\pi}{4k}$ とおくと

$$\cos k\theta = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

となり、これは無理数である。また、(3)の結果を用いると

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = T_k(\cos \theta)$$

となるが、右辺は $\cos \theta$ に関する整数係数の k 次の整式であるから、 $\cos \theta$ が有理数のとき $T_k(\cos \theta)$ も有理数となる。しかしこれは左辺が無理数であることと矛盾するので、 $\cos \frac{\pi}{4k}$ が

無理数であることが示された。

(証明終)

(1)

$$f(0) = 0 + \int_0^0 e^t f(t) dt = 0$$

となる。また,

$$f(x) = x^2 e^{-x} + e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt$$

から

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} - e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt + e^{-x} \cdot e^x f(x) \\ &= (-x^2 + 2x)e^{-x} - e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt + f(x) \end{aligned}$$

となるので

$$f'(0) = 0$$

となる。

(答) $f(0) = 0, f'(0) = 0$

(2)

(1)より

$$f(x) = x^2 e^{-x} + e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt$$

$$f'(x) = (-x^2 + 2x)e^{-x} - e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt + f(x)$$

であるから、2式より $f(x)$ を消去すると

$$f'(x) = 2xe^{-x}$$

となる。

(答) $f'(x) = 2xe^{-x}$

(3)

$f'(0) = 0$ であることと(2)の結果を用いると

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x f'(t) dt + f(0) \\ &= \int_0^x 2te^{-t} dt \\ &= \int_0^x 2t(-e^{-t})' dt \\ &= \left[-2te^{-t} \right]_0^x + \int_0^x 2e^{-t} dt \\ &= -2xe^{-x} - \left[2e^{-x} \right]_0^x \\ &= -2(x+1)e^{-x} + 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $f(x) = -2(x+1)e^{-x} + 2$

(1) 問題文の条件より、P の遷移とその確率は

n 回目の移動後の P の位置	$n+1$ 回目の移動後の P の位置	確率
B, D, E	A	$\frac{1}{3}$
A	B, D, E	1
C, F, H	B, D, E	$\frac{2}{3}$
B, D, E	C, F, H	$\frac{2}{3}$
G	C, F, H	1
C, F, H	G	$\frac{1}{3}$

となる。よって

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{1}{3}q_n \\ q_{n+1} = p_n + \frac{2}{3}r_n \\ r_{n+1} = \frac{2}{3}q_n + s_n \\ s_{n+1} = \frac{1}{3}r_n \end{cases} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

と表せる。P は最初に A にあるので、1 回目の移動後は B, D, E のいずれかにある。よって

$$(p_1, q_1, r_1, s_1) = (0, 1, 0, 0)$$

となり、①式より

$$(p_2, q_2, r_2, s_2) = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0\right)$$
$$(p_3, q_3, r_3, s_3) = \left(0, \frac{7}{9}, 0, \frac{2}{9}\right)$$

となる。

$$\text{(答)} \quad (p_2, q_2, r_2, s_2) = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0\right), \quad (p_3, q_3, r_3, s_3) = \left(0, \frac{7}{9}, 0, \frac{2}{9}\right)$$

(2) (1)より①式が解答となる。

$$\text{(答)} \quad \begin{cases} p_{n+1} = \frac{1}{3}q_n \\ q_{n+1} = p_n + \frac{2}{3}r_n \\ r_{n+1} = \frac{2}{3}q_n + s_n \\ s_{n+1} = \frac{1}{3}r_n \end{cases}$$

(3) ①式を用いると

$$\begin{cases} p_{n+1} + r_{n+1} = q_n + s_n \\ q_{n+1} + s_{n+1} = p_n + r_n \end{cases}$$

となり、

$$\begin{cases} p_{2n} + r_{2n} = q_{2n-1} + s_{2n-1} = p_{2n-2} + r_{2n-2} = \cdots = p_2 + r_2 = 1 \\ p_{2n+1} + r_{2n+1} = q_{2n} + s_{2n} = p_{2n-1} + r_{2n-1} = \cdots = p_1 + r_1 = 0 \end{cases}$$

となるから、

$$p_n + r_n = \begin{cases} 1 & (n \text{ が偶数のとき}) \\ 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad p_n + r_n = \begin{cases} 1 & (n \text{ が偶数のとき}) \\ 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

(4) ①式より

$$\begin{aligned} p_{2k+2} &= \frac{1}{3}q_{2k+1} \\ &= \frac{1}{3}\left(p_{2k} + \frac{2}{3}r_{2k}\right) \\ &= \frac{1}{3}p_{2k} + \frac{2}{9}r_{2k} \end{aligned}$$

となる。また、(3)の結果より

$$\begin{aligned} p_{2k} + r_{2k} &= 1 \\ \Leftrightarrow r_{2k} &= 1 - p_{2k} \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} p_{2k+2} &= \frac{1}{3}p_{2k} + \frac{2}{9}(1 - p_{2k}) \\ &= \frac{1}{9}p_{2k} + \frac{2}{9} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad p_{2k+2} = \frac{1}{9}p_{2k} + \frac{2}{9}$$

(5) (4)より

$$\begin{aligned} p_{2k+2} &= \frac{1}{9}p_{2k} + \frac{2}{9} \\ \Leftrightarrow p_{2(k+1)} - \frac{1}{4} &= \frac{1}{9}\left(p_{2k} - \frac{1}{4}\right) \\ \Leftrightarrow p_{2k} - \frac{1}{4} &= \left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}\left(p_2 - \frac{1}{4}\right) \\ \Leftrightarrow p_{2k} &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^k \end{aligned}$$

となる。また、(3)の結果より

$$r_{2k} = 1 - p_{2k} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^k$$

となる。また、①式より

$$\begin{cases} q_{2k+1} = p_{2k} + \frac{2}{3}r_{2k} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^k \\ s_{2k+1} = \frac{1}{3}r_{2k} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^k \end{cases}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \begin{cases} p_{2k} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^k \\ r_{2k} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^k \\ q_{2k+1} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^k \\ s_{2k+1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^k \end{cases}$$

4

(1)

C の方程式を変形すると

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + (y-1)^2 &= 8 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 2y - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 + y^2) - 2(x+y) - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow \{(x+y)^2 - 2xy\} - 2(x+y) - 6 &= 0\end{aligned}$$

となる。 C と L の共有点においては、上式と $xy=1$ も満たすことから

$$\begin{aligned}\{(x+y)^2 - 2\} - 2(x+y) - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+y)^2 - 2(x+y) - 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+y-4)(x+y+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x+y &= -2, 4 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。よって解と係数の関係より、 C, L の共有点の座標 (x, y) は 2 次方程式

$$\begin{cases} t^2 + 2t + 1 = 0 \\ t^2 - 4t + 1 = 0 \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

の解となる。 $\textcircled{2}$ の第 1 式を解くと

$$\begin{aligned}(t+1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= -1\end{aligned}$$

となり、 $\textcircled{2}$ の第 2 式を解くと

$$t = 2 \pm \sqrt{3}$$

となるから、求める共有点の座標は

$$(-1, -1), (2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}), (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (-1, -1), (2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}), (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$$

(2)

C の中心 P の座標は $(1, 1)$ である。 (1) の結果を用いると

$$Q: (2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}), R: (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$$

であるから、

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}) \\ \overrightarrow{PR} = (1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}) \end{cases}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\cos \angle QPR &= \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}| |\overrightarrow{PR}|} \\ &= \frac{-4}{8} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

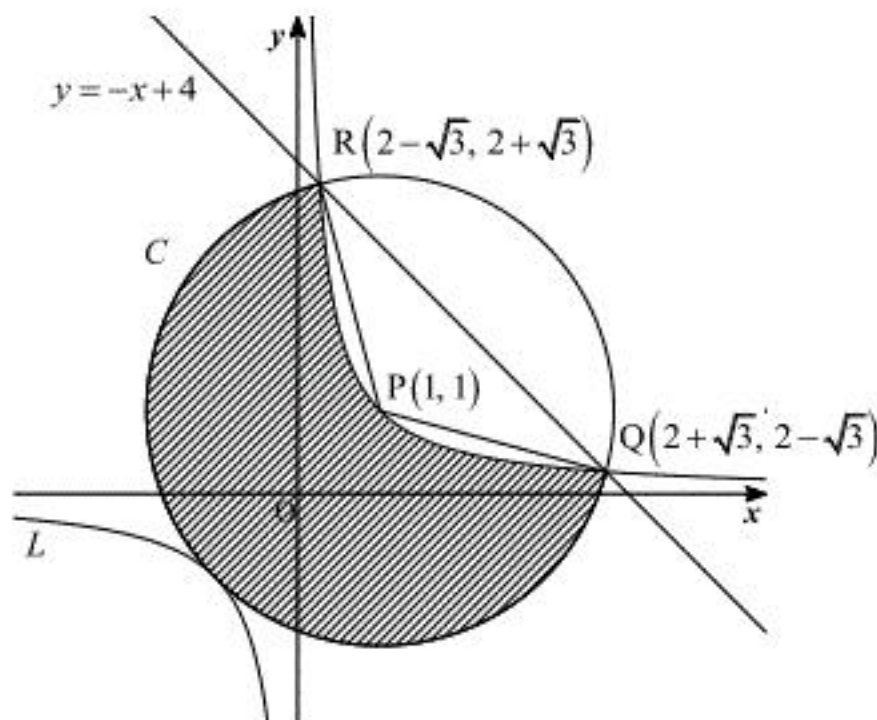
となるから

$$\angle QPR = 120^\circ$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \angle QPR = 120^\circ$$

(3)



上図斜線部の領域の面積を求めればよい。ここで

$$\begin{aligned}\text{求める面積} &: S \\ \text{円 } C \text{ の面積} &: S_1 \\ \text{直線 } QR \text{ と双曲線 } L \text{ によって囲まれる部分の面積} &: S_2 \\ \text{扇形 } PQR \text{ の面積} &: S_3 \\ \triangle PQR \text{ の面積} &: S_4\end{aligned}$$

とおくと

$$S = S_1 - (S_2 + S_3 - S_4) \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。

円 C の半径は $2\sqrt{2}$ であるから

$$S_1 = \pi (2\sqrt{2})^2 = 8\pi$$

となる。

2 点 R, Q を通る直線の方程式は、 $\textcircled{1}$ より $x+y=4$ である。よって直線 $x+y=4$ と L で囲まれる部分の面積は

$$\begin{aligned}S_2 &= \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \left(-x + 4 - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 4x - \log x \right]_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \\ &= 4\sqrt{3} - 2\log(2+\sqrt{3})\end{aligned}$$

となる。

扇形 PQR の中心角は (2) より 120° であるから

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \pi (2\sqrt{2})^2 = \frac{8}{3} \pi$$

となる。

$\triangle PQR$ は $PQ = PR = 2\sqrt{2}$ 、 $\angle QPR = 120^\circ$ の二等辺三角形であるから、

$$S_4 = \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{2})^2 \cdot \sin 120^\circ = 2\sqrt{3}$$

となる。

以上より、 $\textcircled{3}$ から求める面積は

$$\begin{aligned}S &= 8\pi - \left\{ 4\sqrt{3} - 2\log(2+\sqrt{3}) + \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3} \right\} \\ &= \frac{16}{3}\pi - 2\sqrt{3} + 2\log(2+\sqrt{3})\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{16}{3}\pi - 2\sqrt{3} + 2\log(2+\sqrt{3})$$