

数 学

(理学部 数学科)

(平成 29 年度)【前期日程】

問題冊子 1～4 ページ 答案用紙 4 枚

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけない。
2. 配布された用紙に、枚数の不足や印刷不鮮明な箇所がある場合には申し出ること。
3. 受験番号は、答案用紙 1 枚ごとに所定の欄 2 箇所に必ず記入すること。記入を忘れたり、誤った番号を記入したときは採点されないことがある。
4. 解答は必ず答案用紙の指定された箇所へ記入すること。やむをえず裏面にまで解答が及ぶ場合には、その旨を明記し、かつ、受験番号等を記入する部分(上部、右部分)の裏には記入しないこと。
5. 試験が終了したら、4 枚の答案用紙を上から(その 1)、(その 2)、(その 3)、(その 4)の順になるように机上におくこと。
6. 退場するときは、問題冊子を持ち帰ること。

1

次の問いに答えよ。

- (1) n を自然数とする。三角関数の加法定理を用いて、等式

$$\cos(n+2)\theta + \cos n\theta = 2\cos\theta \cos(n+1)\theta$$

を導け。

- (2) $\cos 2\theta = T_2(\cos \theta)$, $\cos 3\theta = T_3(\cos \theta)$ を満たす整式 $T_2(x)$, $T_3(x)$ をそれぞれ求めよ。

- (3) 自然数 n に対し, $\cos n\theta = T_n(\cos \theta)$ を満たす整数係数の n 次の整式 $T_n(x)$ が存在することを示せ。

- (4) 自然数 k に対し, $\cos \frac{\pi}{4k}$ は無理数であることを示せ。ただし, $\sqrt{2}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい。

2

関数 $f(x)$ は微分可能で

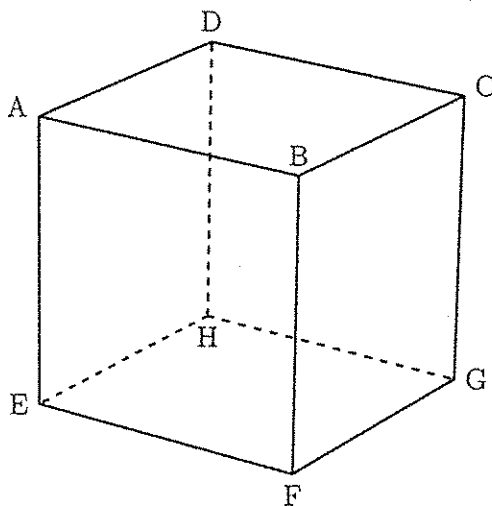
$$f(x) = x^2 e^{-x} + \int_0^x e^{t-x} f(t) dt$$

を満たすものとする。次の問いに答えよ。

- (1) $f(0), f'(0)$ を求めよ。
- (2) $f'(x)$ を求めよ。
- (3) $f(x)$ を求めよ。

立方体 $ABCD-EFGH$ (下図参照) の頂点から頂点へ移動する点 P を考える。1回の移動で、点 P は辺で結ばれた隣の頂点のいずれかに、等しい確率で移動するものとする。また、点 P は最初に頂点 A にあるものとする。 n 回の移動後に、点 P が頂点 A にある確率を p_n 、頂点 B, D, E のいずれかにある確率を q_n 、頂点 C, F, H のいずれかにある確率を r_n 、頂点 G にある確率を s_n とする。次の問いに答えよ。

- (1) $p_2, q_2, r_2, s_2, p_3, q_3, r_3, s_3$ を求めよ。
- (2) $p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}, s_{n+1}$ を p_n, q_n, r_n, s_n を用いて表せ。
- (3) $p_n + r_n$ を求めよ。
- (4) k を自然数とする。 p_{2k+2} を p_{2k} を用いて表せ。
- (5) k を自然数とする。 $p_{2k}, r_{2k}, q_{2k+1}, s_{2k+1}$ を求めよ。



4

xy 平面上に円 C と双曲線 L が次の式で与えられている。

$$C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8$$

$$L: xy = 1$$

次の問いに答えよ。

- (1) 円 C と双曲線 L の共有点をすべて求めよ。
- (2) 円 C の中心を P とし、(1) で求めた共有点のうち、 x 座標が最も大きいものを Q 、その次に大きいものを R とする。このとき、 $\angle QPR$ を求めよ。
- (3) 以下の領域の面積を求めよ。

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 8 \\ xy \leq 1 \end{cases}$$