

(1)

$$f(\alpha) = \beta \quad \dots \textcircled{1}$$

$$f(\beta) = \alpha \quad \dots \textcircled{2}$$

であるから、①から②を辺々引いて、

$$f(\alpha) - f(\beta) = \beta - \alpha \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha^2 - \beta^2) + a(\alpha - \beta) = \beta - \alpha$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)(\alpha + \beta + a + 1) = 0$$

となる。 $\alpha - \beta \neq 0$ であるから、

$$\alpha + \beta + a + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = -a - 1$$

となる。また、①と②を辺々足して、

$$f(\alpha) + f(\beta) = \beta + \alpha \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha^2 + \beta^2) + a(\alpha + \beta) + 2b = \beta + \alpha$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + a(\alpha + \beta) + 2b = \beta + \alpha$$

$$\Leftrightarrow \alpha\beta = \frac{(\alpha + \beta)^2 + (a-1)(\alpha + \beta) + 2b}{2} = \frac{(-a-1)^2 + (a-1)(-a-1) + 2b}{2} = a + b + 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \alpha + \beta = -a - 1, \quad \alpha\beta = a + b + 1$$

(2)

(1)より、

$$\begin{cases} \alpha - \beta \neq 0 \\ \alpha + \beta = -a - 1 \\ \alpha\beta = a + b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \\ \alpha - \beta \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \alpha - \beta \neq 0 \end{cases}$$

であるから、 $\alpha + \beta = -a - 1$ 、 $\alpha\beta = a + b + 1$ 、 $\alpha - \beta \neq 0$ を満たすとき題意を満たす。ここで、

α, β は2次方程式 $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \Leftrightarrow x^2 + (a+1)x + a+b+1 = 0$ の解である。この2次方程式が異なる2つの実数解を持てばよく、この2次方程式の判別式を D とすると、 $D > 0$ である。よって、

$$D > 0$$

$$\Leftrightarrow (a+1)^2 - 4(a+b+1) > 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a - 4b - 3 > 0$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a^2 - 2a - 4b - 3 > 0$$

(1)

 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 それぞれの傾きを考える。[1] $a=0$ のとき ℓ_1 は x 軸に平行で、 ℓ_2 は y 軸に平行で、 ℓ_3 の傾きは -1 である。よって、題意を満たす。[2] $a \neq 0$ のとき ℓ_1 の傾きは $-a$ で、 ℓ_2 の傾きは $-\frac{1}{a}$ で、 ℓ_3 の傾きは -1 である。よって、題意を満たすに

は、

$$\begin{cases} -a \neq -\frac{1}{a} \\ -a \neq -1 \Leftrightarrow a \neq \pm 1, 0 \\ -\frac{1}{a} \neq -1 \end{cases}$$

となる。

以上, [1], [2]より, 求める条件は

$$a \neq \pm 1$$

となる。

(答) $a \neq \pm 1$

(2)

(1)の条件を満たすので、 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 のどの2つもそれぞれただ1つ交点をもつ。これらの交点が全て異なりかつ同一直線上にあると仮定すると、 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 はいずれも3つの交点を通る直線と一致するが、これは(1)の条件を満たさず、起こりえない。よって、それらの交点のうちどの2点においても座標が一致しなければよい。[1] $a=0$ のとき ℓ_1 と ℓ_2 の交点は $(-1, -1)$ であり、 ℓ_2 と ℓ_3 の交点は $(-1, 1)$ であり、 ℓ_1 と ℓ_3 の交点は $(1, -1)$ であるから条件を満たす。[2] $a \neq 0$ のとき ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 の中に y 軸に平行な直線は存在しないので、その2交点を通る直線において x 座標が等しく y 座標が異なるような点は存在しない。よって、交点の x 座標が異なることと交点の座標は異なることは同値である。 ℓ_1 と ℓ_2 の交点の x 座標は、 y を消去して、

$$\begin{aligned} (a^2 - 1)x + a - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a - 1)\{(a + 1)x + 1\} &= 0 \\ \therefore x &= -\frac{1}{a + 1} \quad (\because a \neq \pm 1) \end{aligned}$$

となる。 ℓ_2 と ℓ_3 の交点の x 座標は、 y を消去して、

$$\begin{aligned} (1 - a)x + 1 - a^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 - a)(x + a + 1) &= 0 \\ \therefore x &= -a - 1 \quad (\because a \neq 1) \end{aligned}$$

となる。 ℓ_1 と ℓ_3 の交点の x 座標は、 y を消去して、

$$\begin{aligned} (a - 1)x - a + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a - 1)(x - 1) &= 0 \\ \therefore x &= 1 \quad (\because a \neq 1) \end{aligned}$$

となる。よって、題意を満たすには、

$$\begin{cases} -\frac{1}{a+1} \neq -(a+1) \\ -(a+1) \neq 1 \\ -\frac{1}{a+1} \neq 1 \\ a \neq 0, \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \neq -2, \pm 1, 0$$

となる。

以上, [1], [2], より, 求める条件は

$$a \neq \pm 1, -2$$

となる。

(答) $a \neq \pm 1, -2$

(3)

 $\triangle ABC$ が正三角形になるには、三角形の内角が $\frac{\pi}{3}$ になればよい。すなわち、 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 のどの2つのなす角も $\frac{\pi}{3}$ となればよい。[1] $a=0$ のとき ℓ_1 と ℓ_2 の交点は $(-1, -1)$ であり、 ℓ_2 と ℓ_3 の交点は $(-1, 1)$ であり、 ℓ_1 と ℓ_3 の交点は $(1, -1)$ であるから条件を満たさない。[2] $a \neq 0$ のとき ℓ_1 の傾きは $-a$ で、 ℓ_2 の傾きは $-\frac{1}{a}$ で、 ℓ_3 の傾きは -1 であるので、それぞれの直線が x 軸の正方向となす角を $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta_1, \theta_2, \theta_3 < \frac{\pi}{2}\right)$ とすると、

$$\begin{aligned} \tan \theta_1 &= -a \\ \tan \theta_2 &= -\frac{1}{a} \\ \tan \theta_3 &= -1 \end{aligned}$$

となる。 $\tan \theta_3 = -1$ であるから、 $\theta_3 = -\frac{\pi}{4}$ となり、

$$(\theta_1, \theta_2) = \left(\frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi\right), \left(\frac{5}{12}\pi, \frac{\pi}{12}\right)$$

となればよい。 $(\theta_1, \theta_2) = \left(\frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi\right)$ のとき、

$$\begin{aligned} a &= -\tan \frac{\pi}{12} \\ &= -\tan \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\frac{\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} \\ &= -\frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} \\ &= -\frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} \\ &= \sqrt{3} - 2 \end{aligned}$$

となる。このとき、

$$-\frac{1}{a} = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \tan \frac{5}{12}\pi$$

となるので、条件を満たす。 $(\theta_1, \theta_2) = \left(\frac{5}{12}\pi, \frac{\pi}{12}\right)$ のとき、

$$\begin{aligned} a &= -\tan \frac{5}{12}\pi \\ &= -\tan \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\frac{\tan \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\pi}{6} \tan \frac{\pi}{4}} \\ &= -\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= -\frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2} \\ &= -2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。このとき、

$$-\frac{1}{a} = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5}{12}\pi\right) = \tan \frac{\pi}{12}$$

となるので、条件を満たす。

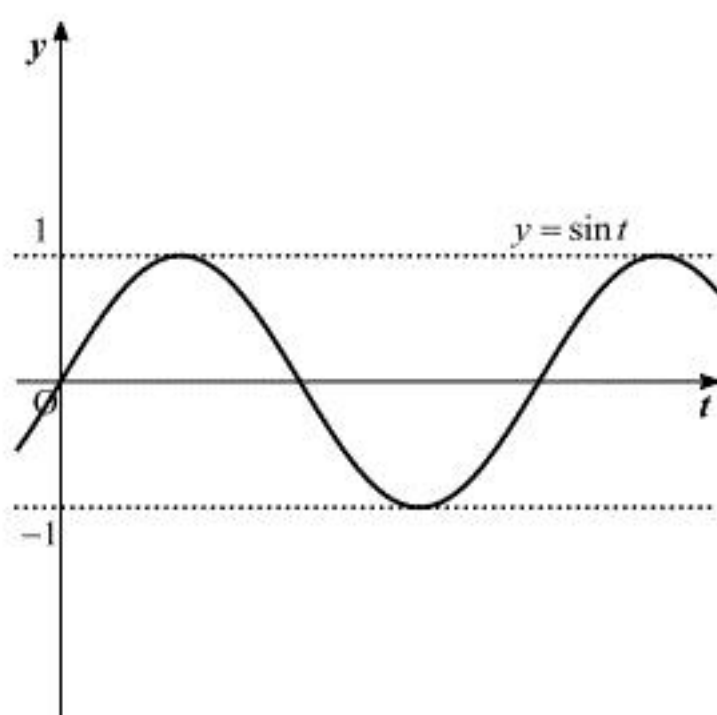
以上, [1], [2]より, 求める条件は

$$a = -2 - \sqrt{3}, \sqrt{3} - 2$$

となる。

(答) $a = -2 - \sqrt{3}, \sqrt{3} - 2$

(1)



M について考える。 $x \leq t \leq x + \frac{\pi}{2}$ における $f(t) = \sin t$ の最大値は,

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき, } M = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{5}{4}\pi \text{ のとき, } M = f(x) = \sin x$$

$$\frac{5}{4}\pi < x \leq 2\pi \text{ のとき, } M = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

となる。つぎに、 m について考える。 $x \leq t \leq x + \frac{\pi}{2}$ における $f(t) = \sin t$ の最小値は,

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ のとき, } m = f(x) = \sin x$$

$$\frac{\pi}{4} < x \leq \pi \text{ のとき, } m = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

$$\pi < x \leq \frac{3}{2}\pi \text{ のとき, } m = f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$$

$$\frac{3}{2}\pi < x \leq 2\pi \text{ のとき, } m = f(x) = \sin x$$

となる。よって、 $g(x)$ は,

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ のとき, } g(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(x) = 1 - \sin x$$

$$\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき, } g(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos x$$

$$\frac{\pi}{2} < x \leq \pi \text{ のとき,}$$

$$g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

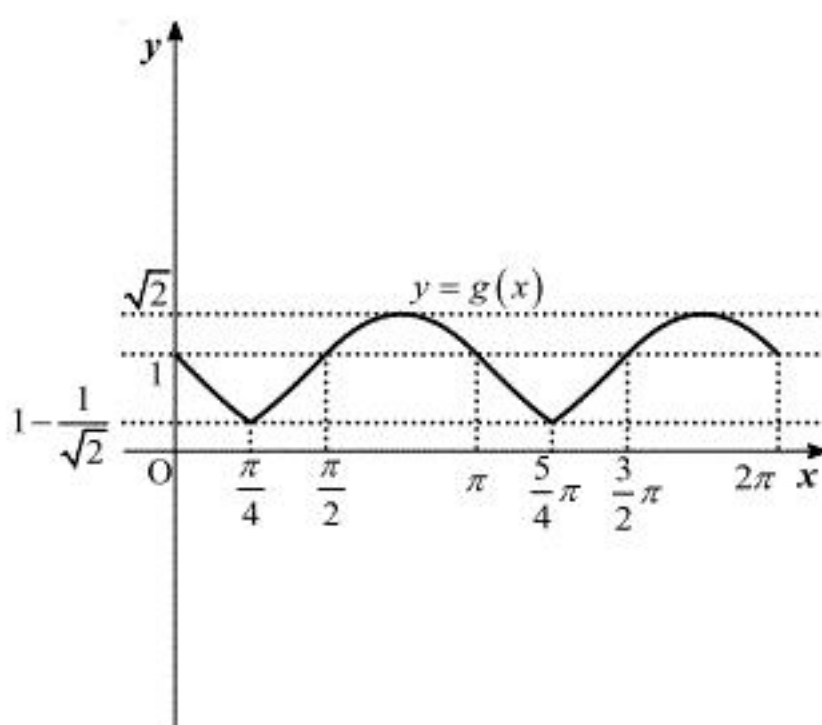
$$\pi < x \leq \frac{5}{4}\pi \text{ のとき, } g(x) = f(x) - f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \sin x + 1$$

$$\frac{5}{4}\pi < x \leq \frac{3}{2}\pi \text{ のとき, } g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \cos x + 1$$

$$\frac{3}{2}\pi < x \leq 2\pi \text{ のとき,}$$

$$g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - f(x) = \cos x - \sin x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)$$

となる。以上から、 $y = g(x)$ のグラフは以下のようになる。



よって、 $g(x) = 1$ となるのは $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ のときである。

(答) $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$

(2)

グラフより、最小値は、 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$ のときで、 $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。最大値は、 $x = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$ のときで、

$\sqrt{2}$ となる。

(答) 最大値： $\sqrt{2}$ ，最小値： $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

$y = f(x)$ が $y = -x$ に原点で接するので、

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = -1$$

である。 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ であるから、 $f'(0) = b$ であり、

$$b = -1$$

となる。 $f'(x) = 3x^2 + 2ax - 1 = 0$ となるとき、

$$3x^2 + 2ax - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 3}}{3}$$

となるから、増減表は以下のようになる。以降、 $\alpha = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 3}}{3}$, $\beta = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 3}}{3}$ とする。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大値	$\searrow$	極小値	$\nearrow$

以上から、

$$f(\alpha) - f(\beta) = 4$$

$$f(\alpha) + f(\beta) > 0$$

となればよい。ここで、

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= -\int_{\alpha}^{\beta} f'(x) dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} 3(x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{2}(\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{4}{27}(a^2 + 3)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \frac{4}{27}(a^2 + 3)^{\frac{3}{2}} &= 4 \\ \Leftrightarrow a^2 + 3 &= 9 \\ \Leftrightarrow a &= \pm\sqrt{6} \end{aligned}$$

となる。

[1] $a = \sqrt{6}$ のとき

$$\alpha = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{6+3}}{3} = \frac{-\sqrt{6} - 3}{3}$$

となる。 $f(x)$ が

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + ax^2 - x \\ &= \left(x + \frac{a}{3}\right)^3 - \frac{a^2}{3}x - x - \frac{a^3}{27} \end{aligned}$$

と変形できることを考慮して、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-3 - \sqrt{6}}{3}\right) &= \left(\frac{-3 - \sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^3 - \frac{(\sqrt{6})^2}{3} \cdot \left(\frac{-3 - \sqrt{6}}{3}\right) - \left(\frac{-3 - \sqrt{6}}{3}\right) - \frac{(\sqrt{6})^3}{27} \\ &= 2 + \frac{7}{9}\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-\sqrt{6} + 3}{3}\right) &= f\left(\frac{-3 - \sqrt{6}}{3}\right) - 4 \\ &= -2 + \frac{7}{9}\sqrt{6} \end{aligned}$$

より、 $f(\alpha) + f(\beta) > 0$ を満たす。

[2] $a = -\sqrt{6}$ のとき

$$\alpha = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{6+3}}{3} = \frac{\sqrt{6} - 3}{3}$$

となるので、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-3 + \sqrt{6}}{3}\right) &= \left(\frac{-3 + \sqrt{6}}{3} + \frac{-\sqrt{6}}{3}\right)^3 - \frac{(-\sqrt{6})^2}{3} \cdot \left(\frac{-3 + \sqrt{6}}{3}\right) - \left(\frac{-3 + \sqrt{6}}{3}\right) - \frac{(-\sqrt{6})^3}{27} \\ &= 2 - \frac{7}{9}\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\sqrt{6} + 3}{3}\right) &= f\left(\frac{-3 + \sqrt{6}}{3}\right) - 4 \\ &= -2 - \frac{7}{9}\sqrt{6} \end{aligned}$$

より、 $f(\alpha) + f(\beta) > 0$ を満たさない。

以上、[1], [2]より、 $a = \sqrt{6}$ となる。

(答) $a = \sqrt{6}$, $b = -1$