

1

(1)

[1] $n=1$ のとき

与式は、 $x+1=(x^2+1)f_1(x)+a_1x+b_1$ であり

$$x+1=(x^2+1)\cdot 0+x+1$$

であるから、両辺を比較して

$$f_1(x)=0, a_1=1, b_1=1$$

を得る。

[2] $n=2$ のとき

与式は、 $(x+1)^2=(x^2+1)f_2(x)+a_2x+b_2$ であり

$$(x+1)^2=x^2+2x+1=(x^2+1)\cdot 1+2x$$

であるから、両辺を比較して

$$f_2(x)=1, a_2=2, b_2=0$$

を得る。

[3] $n=3$ のとき

与式は、 $(x+1)^3=(x^2+1)f_3(x)+a_3x+b_3$ であり

$$(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1=(x^2+1)(x+3)+2x-2$$

であるから、両辺を比較して

$$f_3(x)=x+3, a_3=2, b_3=-2$$

を得る。

以上[1], [2], [3]より、

$$a_1=1, a_2=2, a_3=2, b_1=1, b_2=0, b_3=-2, f_1(x)=0, f_2(x)=1, f_3(x)=x+3$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad a_1=1, a_2=2, a_3=2, b_1=1, b_2=0, b_3=-2, f_1(x)=0, f_2(x)=1, f_3(x)=x+3$$

(2)

与式を変形すると

$$\begin{aligned}(x+1)^{n+1} &= (x+1)(x+1)^n \\ &= (x+1)\{(x^2+1)f_n(x)+a_nx+b_n\} \\ &= (x+1)(x^2+1)f_n(x)+(x+1)(a_nx+b_n) \\ &= (x+1)(x^2+1)f_n(x)+(x^2+1)a_n+(a_n+b_n)x+b_n-a_n \\ &= (x^2+1)\{(x+1)f_n(x)+a_n\}+(a_n+b_n)x+(b_n-a_n)\end{aligned}$$

となり、 $(x+1)^{n+1}=(x^2+1)f_{n+1}(x)+a_{n+1}x+b_{n+1}$ と係数を比較することで、

$$a_{n+1}=a_n+b_n, b_{n+1}=b_n-a_n$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad a_{n+1}=a_n+b_n, b_{n+1}=b_n-a_n$$

(3)

全ての自然数に対し

$$\begin{cases} a_n = 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4} \\ b_n = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4} \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことを、数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき、

$$a_1 = 2^{\frac{1}{2}} \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

$$b_1 = 2^{\frac{1}{2}} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

となるので、(1)より題意は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき

$$a_k = 2^{\frac{k}{2}} \sin \frac{k\pi}{4}, b_k = 2^{\frac{k}{2}} \cos \frac{k\pi}{4}$$

が成り立つと仮定すると、 $n=k+1$ のとき、

$$\begin{aligned}a_{k+1} &= a_k + b_k \\ &= 2^{\frac{k}{2}} \left(\sin \frac{k\pi}{4} + \cos \frac{k\pi}{4} \right) \\ &= 2^{\frac{k}{2}} \cdot \sqrt{2} \sin \left(\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 2^{\frac{k+1}{2}} \sin \frac{(k+1)\pi}{4}\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}b_{k+1} &= b_k - a_k \\ &= 2^{\frac{k}{2}} \left(\cos \frac{k\pi}{4} - \sin \frac{k\pi}{4} \right) \\ &= 2^{\frac{k}{2}} \cdot \sqrt{2} \cos \left(\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 2^{\frac{k+1}{2}} \cos \frac{(k+1)\pi}{4}\end{aligned}$$

となるので、 $n=k+1$ のときも①が成り立つ。

以上[1], [2]より、数学的帰納法から、全ての自然数に対し、①は成り立つ。

(証明終)

(4)

$(x+1)^n=(x^2+1)f_n(x)+a_nx+b_n$ に $x=1$ を代入すると、

$$\begin{aligned}2^n &= 2f_n(1)+a_n+b_n \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= \frac{f_n(1)}{2^n} + \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} \\ \Leftrightarrow \frac{f_n(1)}{2^n} &= \frac{1}{2} - \frac{2^{\frac{n+1}{2}} \sin \frac{(n+1)\pi}{4}}{2^{n+1}} \\ \Leftrightarrow \frac{f_n(1)}{2^n} &= \frac{1}{2} - \frac{\sin \frac{(n+1)\pi}{4}}{(\sqrt{2})^{n+1}}\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}-1 &\leq \sin \frac{(n+1)\pi}{4} \leq 1 \\ \Leftrightarrow -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} \sin \frac{(n+1)\pi}{4} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

であり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} = 0$ であるから、はさみうちの原理より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} \sin \frac{(n+1)\pi}{4} \right\} = 0$

が得られる。以上より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(1)}{2^n} = \frac{1}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(1)}{2^n} = \frac{1}{2}$$

(1)

$A(a), Q(2ab)$ より, $AQ = |2ab - a| = 2|a| \left| b - \frac{1}{2} \right|$ となる。ここで, S は中心 $P\left(\frac{1}{2}\right)$, 半径 $\frac{1}{2}$ の円で
あり, $B(b)$ は S 上の点であるから, $\left| b - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$ が成り立つ。したがって,

$$AQ = 2|a| \left| b - \frac{1}{2} \right| = |a| = OA$$

であるから, $\triangle OAQ$ は $OA = AQ$ の二等辺三角形である。同様にして,

$BQ = |2ab - b| = 2|b| \left| a - \frac{1}{2} \right|$ であり, $A(a)$ が S 上の点であることから, $\left| a - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$ が成り立つ。

よって,

$$BQ = 2|b| \left| a - \frac{1}{2} \right| = OB$$

であるから, $\triangle OBQ$ は $OB = BQ$ の二等辺三角形である。

(証明終)

(2)

$\triangle OAQ$ と $\triangle OBQ$ は, それぞれ $OA = AQ$, $OB = BQ$ の二等辺三角形であるから, A, B それぞれから OQ に下した垂線の足はともに OQ の midpoint となり一致する。この点が D であるから

$$OD = \frac{1}{2}OQ \Leftrightarrow d = ab$$

となる。ここで, $R(2bc), T(2ca)$ において, (1)と同様に考えると

$$OB = BR, OC = CR, OC = CT, OA = AT$$

が成り立つから, 同様にして

$$e = bc, f = ca$$

となる。

(答) $d = ab, e = bc, f = ca$

(3)

O, A, B, C が反時計回りにこの順で並んでいるとしても一般性を失わない。このとき,

$\frac{f-d}{e-d} = \frac{ca-ab}{bc-ab} = \frac{a(c-b)}{b(c-a)}$ が実数となることを示す。円周角の定理より

$$\angle AOB = \angle ACB$$

であるから,

$$\arg\left(\frac{b}{a}\right) = \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)$$

である。よって,

$$\arg\left\{\frac{a(c-b)}{b(c-a)}\right\} = \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) - \arg\left(\frac{b}{a}\right) = 0$$

であるから, $\frac{f-d}{e-d} = \frac{a(c-b)}{b(c-a)}$ は実数である。したがって, D, E, F は一直線上にある。ここで,

$U(2abc)$ とおくと, 線分 OU の垂直二等分線 L は, 複素数 z を用いて,

$$|z| = |z - 2abc|$$

と表せる。このとき,

$$\begin{aligned} |d - 2abc| &= |ab - 2abc| \\ &= 2|ab| \left| \frac{1}{2} - c \right| \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} |d| \\ &= |d| \end{aligned}$$

を満たすので, d は L 上にある。同様にして,

$$\begin{aligned} |e - 2abc| &= |bc - 2abc| = 2|bc| \left| \frac{1}{2} - a \right| = |e| \\ |f - 2abc| &= |ca - 2abc| = 2|ca| \left| \frac{1}{2} - b \right| = |f| \end{aligned}$$

を満たすので, e, f も L 上にあり, d, e, f を通る直線は L であるとわかる。これより, 点 O から L に下ろした垂線の足は abc である。

(証明終)

(1)

球の方程式は $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ であるから、これに $A(-a, 0, b)$ を代入することで

$$a^2 + b^2 = 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が得られる。また、 $AB = 2b$, $AC = \sqrt{4a^2 + b^2 + b^2}$ であるから、 $AB = AC$ より、

$$AB^2 = AC^2$$

$$\Leftrightarrow 4b^2 = 4a^2 + 2b^2$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - b^2 = 0$$

$$\therefore \sqrt{2}a = b \quad (\because a > 0, b > 0) \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。①、②を $a > 0, b > 0$ において連立して解くと、 $a = 1, b = \sqrt{2}$ となる。

(答) $a = 1, b = \sqrt{2}$

(2)

$\overline{AD} = (2, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$ であり、交点の座標を $T(t, \alpha, \beta)$ とおくと、 k を実数として

$$\begin{aligned} \overline{OT} &= \overline{OA} + k\overline{AD} \\ &= (2k-1, \sqrt{2}k, -\sqrt{2}k+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

と表せる。 $T(t, \alpha, \beta)$ と成分を比較することで、 $T\left(t, \frac{\sqrt{2}(t+1)}{2}, \frac{-\sqrt{2}(t-1)}{2}\right)$ を得る。

(答) $\left(t, \frac{\sqrt{2}(t+1)}{2}, \frac{-\sqrt{2}(t-1)}{2}\right)$

(3)

立体の体積を V とする。立体の $x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$) での切断面は、半径が

$$\sqrt{\left\{\frac{\sqrt{2}(t+1)}{2}\right\}^2 + \left\{-\frac{\sqrt{2}(t-1)}{2}\right\}^2} = \sqrt{\frac{t^2 + 2t + 1 + t^2 - 2t + 1}{2}} = \sqrt{t^2 + 1}$$

である円となる。よって、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 \left(\sqrt{t^2 + 1}\right)^2 dt \\ &= 2\pi \int_0^1 (t^2 + 1) dt \\ &= 2\pi \left[\frac{t^3}{3} + t\right]_0^1 \\ &= \frac{8}{3}\pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{8}{3}\pi$

(1)

$P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ であるから、点 P における接線の方程式は、

$$\begin{aligned}\frac{xa\cos\theta}{a^2} + \frac{yb\sin\theta}{b^2} &= 1 \\ \therefore \frac{x\cos\theta}{a} + \frac{y\sin\theta}{b} &= 1\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{x\cos\theta}{a} + \frac{y\sin\theta}{b} = 1$$

(2)

$R(\alpha, \beta)$, $C:(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ とおく。 C は点 $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ を通るから

$$a^2\cos^2\theta - 2a\alpha\cos\theta + \alpha^2 + b^2\sin^2\theta - 2b\beta\sin\theta + \beta^2 = r^2$$

が成り立ち、同様に、点 $Q(-a\cos\theta, -b\sin\theta)$ を通るから

$$a^2\cos^2\theta + 2a\alpha\cos\theta + \alpha^2 + b^2\sin^2\theta + 2b\beta\sin\theta + \beta^2 = r^2$$

が成り立つ。これらより

$$a\alpha\cos\theta + b\beta\sin\theta = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

を得る。また、 C と E が点 P で接するとき、 C は点 P において、(1)で求めた直線に接する。このとき、その直線と垂直でかつ点 P を通る直線は

$$\begin{aligned}-\frac{\sin\theta}{b}(x-a\cos\theta) + \frac{\cos\theta}{a}(y-b\sin\theta) &= 0 \\ \Leftrightarrow -a\sin\theta(x-a\cos\theta) + b\cos\theta(y-b\sin\theta) &= 0\end{aligned}$$

であり、 C の中心を通るから

$$\begin{aligned}-a\sin\theta(\alpha-a\cos\theta) + b\cos\theta(\beta-b\sin\theta) &= 0 \\ \Leftrightarrow a\alpha\sin\theta - b\beta\cos\theta &= (a^2-b^2)\cos\theta\sin\theta\end{aligned}$$

が成り立ち、 $a^2-b^2=1$ であることより

$$a\alpha\sin\theta - b\beta\cos\theta = \cos\theta\sin\theta \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。 $\textcircled{2}$ の両辺に $\sin\theta$ をかけて整理すると

$$\begin{aligned}a\alpha\sin^2\theta - b\beta\cos\theta\sin\theta &= \cos\theta\sin^2\theta \\ \Leftrightarrow a\alpha\sin^2\theta - \cos\theta(-a\alpha\cos\theta) &= \cos\theta\sin^2\theta \quad (\because \textcircled{1}) \\ \Leftrightarrow a\alpha &= \cos\theta\sin^2\theta \\ \therefore \alpha &= \frac{\cos\theta\sin^2\theta}{a}\end{aligned}$$

となる。同様に $\textcircled{2}$ の両辺に $\cos\theta$ をかけて整理すると

$$\begin{aligned}a\alpha\cos\theta\sin\theta - b\beta\cos^2\theta &= \cos^2\theta\sin\theta \\ \Leftrightarrow \sin\theta(-b\beta\sin\theta) - b\beta\cos^2\theta &= \cos^2\theta\sin\theta \\ \Leftrightarrow -b\beta &= \cos^2\theta\sin\theta \\ \therefore \beta &= -\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{b}\end{aligned}$$

となる。また、このとき

$$\begin{aligned}r &= PR \\ &= \sqrt{\left(a\cos\theta - \frac{\cos\theta\sin^2\theta}{a}\right)^2 + \left(b\sin\theta + \frac{\cos^2\theta\sin\theta}{b}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2}(a^2 - \sin^2\theta)^2 + \frac{\sin^2\theta}{b^2}(b^2 + \cos^2\theta)^2} \\ &= \sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2}(b^2 + \cos^2\theta)^2 + \frac{\sin^2\theta}{b^2}(b^2 + \cos^2\theta)^2} \quad (\because a^2 - b^2 = 1) \\ &= (b^2 + \cos^2\theta) \sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}} \\ &= (b^2 + \cos^2\theta) \sqrt{\frac{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}{a^2b^2}} \\ &= \frac{1}{ab}(b^2 + \cos^2\theta) \sqrt{(-a^2 + b^2)\cos^2\theta + a^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} \\ &= \frac{1}{ab}(b^2 + \cos^2\theta) \sqrt{a^2 - \cos^2\theta} \quad (\because a^2 - b^2 = 1)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad R\left(\frac{\cos\theta\sin^2\theta}{a}, -\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{b}\right), r = \frac{1}{ab}(b^2 + \cos^2\theta)\sqrt{a^2 - \cos^2\theta}$$

(3)

$x = \cos^2\theta$ とおくと、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より $0 \leq x \leq 1$, $\cos\theta = \sqrt{x}$ であり

$$r = \frac{1}{ab}(b^2 + x)\sqrt{a^2 - x}$$

となる。 $0 \leq x \leq 1$ において x は

$$-b^2 < 0 \leq x \leq 1 < b^2 + 1 = a^2$$

を満たすから、この範囲において r は正の実数となり、半径であることに適する。 r を x で微分して整理すると

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dx} &= \frac{1}{ab}\sqrt{a^2 - x} + \frac{1}{ab}(b^2 + x) \cdot \frac{-1}{2\sqrt{a^2 - x}} \\ &= \frac{2(a^2 - x) - (b^2 + x)}{2ab\sqrt{a^2 - x}} \\ &= \frac{-3x + 2(b^2 + 1) - b^2}{2ab\sqrt{a^2 - x}} \quad (\because a^2 - b^2 = 1) \\ &= \frac{-3x + b^2 + 2}{2ab\sqrt{a^2 - x}}\end{aligned}$$

となる。

[1] $\frac{b^2+2}{3} < 1$ のとき

このとき、

$$b^2 + 2 < 3 \Leftrightarrow 0 < b < 1$$

であり、 r の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{b^2+2}{3}$	...	1
$\frac{dr}{dx}$		+	0	-	
r		$\nearrow$		$\searrow$	

よって、 r は $x = \frac{b^2+2}{3}$ のとき最大となる。

[2] $\frac{b^2+2}{3} \geq 1$ のとき

このとき、

$$b \geq 1$$

であり、 r の増減表は以下のようになる。

x	0	...	1
$\frac{dr}{dx}$		+	
r		$\nearrow$	

よって、 r は $x=1$ のとき最大となる。

[1], [2]と $\cos\theta = \sqrt{x}$ であることから r が最大となるときの $\cos\theta$ の値は

$$0 < b < 1 \text{のとき, } \cos\theta = \sqrt{\frac{b^2+2}{3}}$$

$$b \geq 1 \text{のとき, } \cos\theta = 1$$

である。

$$(\text{答}) \quad 0 < b < 1 \text{のとき, } \cos\theta = \sqrt{\frac{b^2+2}{3}}, \quad b \geq 1 \text{のとき, } \cos\theta = 1$$