

数 学

(理学部 数学科)

(平成 30 年度)【前期日程】

問題冊子 1～4 ページ 答案用紙 4 枚

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけない。
2. 配布された用紙に、枚数の不足や印刷不鮮明な箇所がある場合には申し出ること。
3. 受験番号は、答案用紙 1 枚ごとに所定の欄 2 箇所に必ず記入すること。記入を忘れたり、誤った番号を記入したときは採点されないことがある。
4. 解答は必ず答案用紙の指定された箇所へ記入すること。やむをえず裏面にまで解答が及ぶ場合には、その旨を明記し、かつ、受験番号等を記入する部分(上部、右部分)の裏には記入しないこと。
5. 試験が終了したら、4 枚の答案用紙を上から(その 1)、(その 2)、(その 3)、(その 4)の順になるように机上におくこと。
6. 退室するときは、問題冊子を持ち帰ること。

1

整式 $f_n(x)$, および実数 a_n, b_n は

$$(x+1)^n = (x^2+1)f_n(x) + a_nx + b_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

を満たすものとする。ただし、定数も整式とみなす。次の問いに答えよ。

(1) $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ をそれぞれ求めよ。

(2) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n を用いて表せ。

$$(3) \quad \begin{cases} a_n = 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4} \\ b_n = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4} \end{cases} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(1)}{2^n}$ を求めよ。

2

複素数平面において、点 $P\left(\frac{1}{2}\right)$ を中心とし、原点 O を通る円を S とする。 S 上に O 以外の相異なる 3 点 $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ をとる。 A と B を通る直線を l_1 , B と C を通る直線を l_2 , C と A を通る直線を l_3 とし、点 O から l_1, l_2, l_3 に下ろした垂線の足をそれぞれ $D(d)$, $E(e)$, $F(f)$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) $Q(2ab)$ ととる。3 点 O, A, Q および 3 点 B, O, Q がそれぞれ一直線上にないとき、 $\triangle OAQ$ と $\triangle OBQ$ は二等辺三角形であることを示せ。
- (2) 複素数 d, e, f を a, b, c を用いて表せ。
- (3) 3 点 D, E, F は同一直線上にあり、点 O からその直線に下ろした垂線の足を表す複素数は abc であることを示せ。

3

a, b を正の実数とする。 xyz 空間において、原点を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の球面上に 4 点 $A(-a, 0, b)$, $B(-a, 0, -b)$, $C(a, -b, 0)$, $D(a, b, 0)$ があり、 $AB = AC$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

- (1) a, b を求めよ。
- (2) 実数 t に対し、2 点 A, D を通る直線と平面 $x = t$ との交点の座標を求めよ。
- (3) 四面体 $ABCD$ を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

4

a, b を $a^2 - b^2 = 1$ を満たす正の定数とし, xy 平面において楕円

$$E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

を考える。楕円 E 上に 2 点 $P(a \cos \theta, b \sin \theta)$ と $Q(-a \cos \theta, -b \sin \theta)$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) をとる。点 P で E に接し, 点 Q を通る円を C とする。ここで, C と E が点 P において接するとは, P における C と E の接線が一致することをいう。次の問いに答えよ。

- (1) 点 P における E の接線の方程式を求めよ。
- (2) 円 C の中心 R の座標と半径 r を a, b と θ を用いて表せ。
- (3) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で θ を変化させるとき, 円 C の半径 r が最大となるとき $\cos \theta$ の値を求めよ。ただし, r の最大値を求める必要はない。