

1

(1)

円 C_1 の方程式は $(x-s)^2 + y^2 = 4$ であるから、 C_1 上の点 $P(a, b)$ から引いた接線 l の方程式は、

$$\begin{aligned}(a-s)(x-s) + by &= 4 \\ \Leftrightarrow (a-s)x + by - s(a-s) - 4 &= 0\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad l: (a-s)x + by - s(a-s) - 4 = 0$$

(2)

まず、点 T の x 座標は、

$$\begin{aligned}(a-s)x + b \cdot 0 - s(a-s) - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= s + \frac{4}{a-s} \quad (\because a > s)\end{aligned}$$

であり、点 T は点 $C(s, 0)$ と点 $Q(8, 0)$ の間にあるから、

$$\begin{aligned}s < s + \frac{4}{a-s} < 8 \\ \Leftrightarrow & \text{「} a > s \text{」かつ「} (a-s)(8-s) > 4 \text{」}\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、点 $P(a, b)$ は円 C_1 上にあるから、

$$(a-s)^2 + b^2 = 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、 $QR = 2$ のとき、点 Q と直線 l の距離は 2 であるから、点と直線の距離の公式と①を用いると

$$\begin{aligned}\frac{|(a-s) \cdot 8 + b \cdot 0 - s(a-s) - 4|}{\sqrt{(a-s)^2 + b^2}} &= 2 \\ \Leftrightarrow \frac{|(a-s)(8-s) - 4|}{\sqrt{4}} &= 2 \\ \Leftrightarrow (a-s)(8-s) - 4 &= 4 \quad (\because (a-s)(8-s) > 4) \\ \therefore a &= s + \frac{8}{8-s} \quad (\because s < 4)\end{aligned}$$

が得られる。さらに、①より、

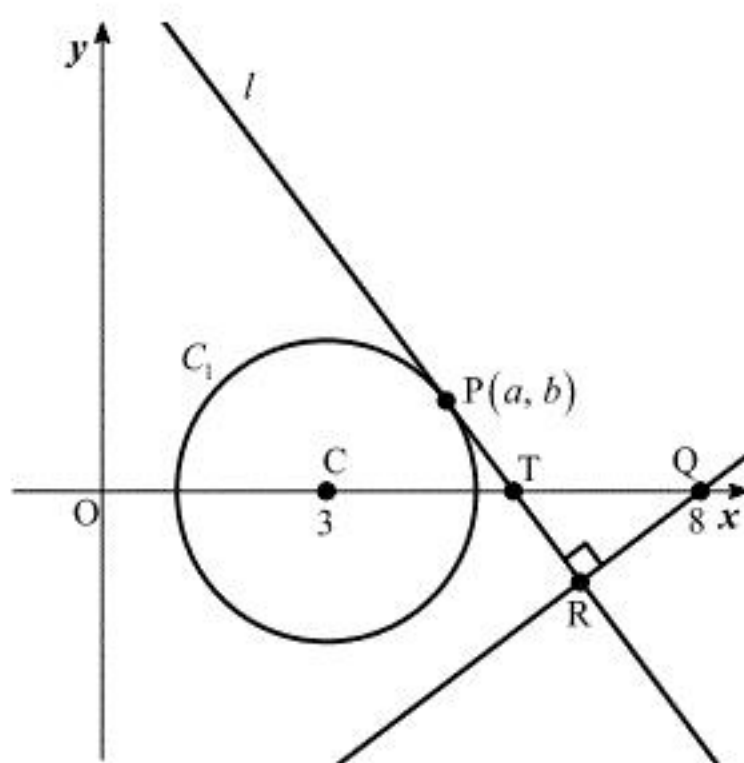
$$\begin{aligned}b^2 &= 4 - (a-s)^2 \\ \therefore b &= \sqrt{4 - \left(\frac{8}{8-s}\right)^2} \quad (\because b > 0)\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a = s + \frac{8}{8-s}, \quad b = \sqrt{4 - \left(\frac{8}{8-s}\right)^2}$$

(3)

以下に、 $s = 3$ における円 C_1 、接線 l 、および点 Q, R, T を図示する。



(2)より、

$$\begin{aligned}a &= 3 + \frac{8}{8-3} = \frac{23}{5} \\ b &= \sqrt{4 - \left(\frac{8}{8-3}\right)^2} = \frac{6}{5}\end{aligned}$$

であり、点 T の x 座標は

$$x = 3 + \frac{4}{\frac{23}{5} - 3} = \frac{11}{2}$$

である。これより、

$$QT = 8 - \frac{11}{2} = \frac{5}{2}$$

が得られ、三平方の定理より、

$$RT = \sqrt{QT^2 - QR^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2^2} = \frac{3}{2}$$

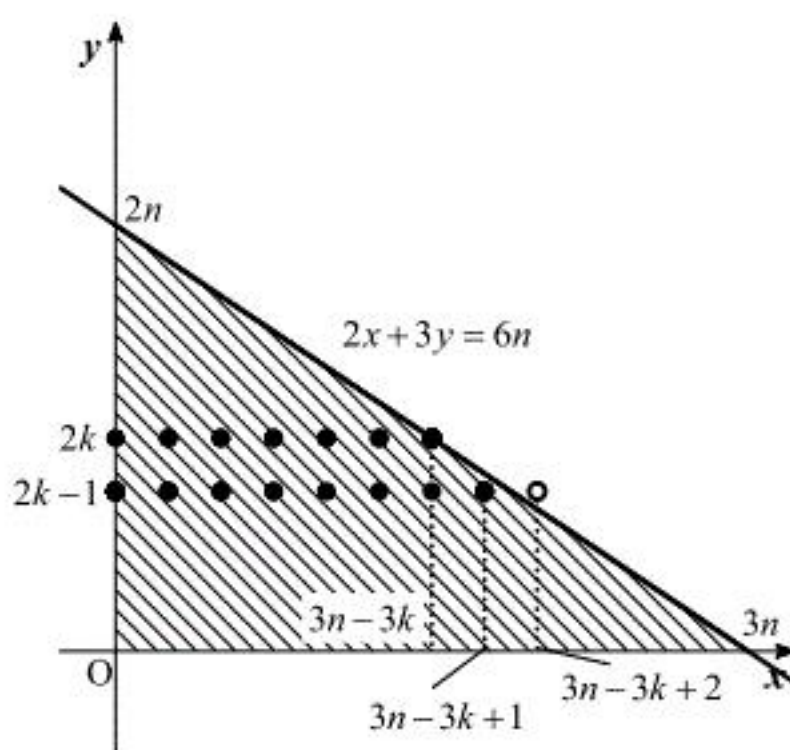
である。したがって、求める面積は、

$$\begin{aligned}W &= \frac{1}{2} QR \cdot RT \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad W = \frac{3}{2}$$

以下に、3本の直線 $2x+3y=6n$, $x=0$, および $y=0$ で囲まれる三角形を斜線部で示す。また、 k を自然数として、直線 $y=2k$, $y=2k-1$ 上にある格子点を点で示す。



以下、直線 $y=2k$, $y=2k-1$ および $y=0$ 上の格子点を場合分けして考える。

[1] 直線 $y=2k$ 上の格子点

直線 $y=2k$ と直線 $2x+3y=6n$ の交点の x 座標は

$$2x+3\cdot 2k=6n \Leftrightarrow x=3n-3k$$

であるから、直線 $y=2k$ 上の格子点は、

$$(0, 2k), (1, 2k), \dots, (3n-3k, 2k)$$

の $3n-3k+1$ 個である。

[2] 直線 $y=2k-1$ 上の格子点

直線 $y=2k-1$ と直線 $2x+3y=6n$ の交点の x 座標は

$$2x+3\cdot (2k-1)=6n \Leftrightarrow x=3n-3k+\frac{3}{2}$$

であるから、点 $(3n-3k+1, 2k-1)$ は含まれるが、点 $(3n-3k+2, 2k-1)$ は含まれない。したがって、直線 $y=2k-1$ 上の格子点は、

$$(0, 2k-1), (1, 2k-1), \dots, (3n-3k+1, 2k-1)$$

の $3n-3k+2$ 個である。

[3] 直線 $y=0$ 上の格子点

上図より、直線 $y=0$ 上の格子点は

$$(0, 0), (1, 0), \dots, (3n, 0)$$

の $3n+1$ 個である

以上[1], [2], [3]より、求める格子点の総数は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \{ (3n-3k+1) + (3n-3k+2) \} + (3n+1) &= 3n+1 + \sum_{k=1}^n (6n-6k+3) \\ &= 3n+1 + (6n+3)n - 6 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= 3n^2 + 3n + 1 \quad (\text{個}) \end{aligned}$$

である。

(答) $3n^2 + 3n + 1$ 個

(1)

$a_1, a_2, \dots, a_7$ を順に求めると,

$$a_1 = a = 16$$

$$a_2 = \log_2 a_1 = \log_2 16 = 4$$

$$a_3 = \log_2 a_2 = \log_2 4 = 2$$

$$a_4 = \log_2 a_3 = \log_2 2 = 1$$

$$a_5 = \log_2 a_4 = \log_2 1 = 0$$

$$a_6 = 2^{a_5} - 2^{-1} = 2^0 - 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$a_7 = \log_2 a_6 = \log_2 \frac{1}{2} = -1$$

となる。

(答) $a_7 = -1$

(2)

$a_1 = a \leq -1$ より, $a_2 = 2^{a_1} - 2^{-1}$ であるから,

$$0 - 2^{-1} < a_2 \leq 2^{-1} - 2^{-1}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < a_2 \leq 0$$

が成り立つ。また, $a_2 \leq 0$ より, $a_3 = 2^{a_2} - 2^{-1}$ であるから,

$$2^{-\frac{1}{2}} - 2^{-1} < a_3 \leq 2^0 - 2^{-1}$$

$$\Leftrightarrow (0 <) \frac{\sqrt{2}-1}{2} < a_3 \leq \frac{1}{2}$$

が成り立つ。さらに, $a_3 > 0$ より, $a_4 = \log_2 a_3$ であるから,

$$\log_2 \frac{\sqrt{2}-1}{2} < a_4 \leq \log_2 \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{\sqrt{2}-1}{2} < a_4 \leq -1 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。ここで, $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ と $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ の大小を考えると,

$$\frac{\sqrt{2}-1}{2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{4-2\sqrt{2}-1}{4\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} > 0$$

$$\therefore \log_2 \frac{\sqrt{2}-1}{2} > \log_2 \frac{1}{4\sqrt{2}} = -\frac{5}{2}$$

となるから, ①より,

$$-\frac{5}{2} < a_4 \leq -1$$

が成り立つ。

(証明終)

(1)

まず、1と書かれた玉をどちらかの箱に入れ、箱を

- ・「1と書かれた玉が入った箱」
- ・「1と書かれた玉が入っていない箱」

の2つに区別する。残りの $n-1$ 個の玉の入れ方の総数は、上のどちらかの箱に入れるかであるから、 2^{n-1} 通りある。ただし、そのうち1通りは n 個すべてを同じ箱に入れる場合であるから、求める場合の数は $2^{n-1}-1$ 通りである。

$$(\text{答}) S_n(2) = 2^{n-1} - 1$$

(2)

まず、 $n=3$ のとき、3個の玉を1個の箱に入れるから、入れ方の総数は1通りである。 $n \geq 4$ のとき、入れ方によって場合分けを行う。

[1] 1個の箱に3個の玉を入れて、残りの $n-3$ 個の箱に1個の玉を入れる場合

n 個の玉のうち3個を選べばよいから、このときの入れ方の総数は ${}_nC_3$ 通りである。

[2] 2個の箱に2個の玉を入れて、残りの $n-4$ 個の箱に1個の玉を入れる場合

n 個の玉のうち2個を選び、さらに残った $n-2$ 個の玉のうち2個を選べばよい。ただし、最初に取り出した2個の玉の組と後に取り出した2個の玉の組を入れ替えたものは同じ

であるから、このときの入れ方の総数は $\frac{{}_nC_2 \cdot {}_{n-2}C_2}{2}$ 通りである。

以上[1], [2]より、 $n \geq 4$ のとき、

$$\begin{aligned} S_n(n-2) &= {}_nC_3 + \frac{{}_nC_2 \cdot {}_{n-2}C_2}{2} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 2 \cdot 2} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)(3n-5)}{24} \end{aligned}$$

である。 $n=3$ を代入すると $\frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4}{24} = 1$ となり、 $n > 2$ を満たすすべての整数に対して、

$$S_n(n-2) = \frac{n(n-1)(n-2)(3n-5)}{24}$$

である。

$$(\text{答}) S_n(n-2) = \frac{n(n-1)(n-2)(3n-5)}{24}$$