

(1)

$s = x + y, t = xy$ とおくと, x, y は X の 2 次方程式

$$X^2 - sX + t = 0$$

の 2 解となる。ここで, 実数 x, y が存在する必要十分条件として, 2 次方程式 $X^2 - sX + t = 0$ は実数解を持つから, その判別式 D について,

$$D \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (-s)^2 - 4t \geq 0$$

$$\Leftrightarrow t \leq \frac{1}{4}s^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また, $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 8$ について,

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6(x+y) + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 - 6(x+y) - 2xy + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow s^2 - 6s - 2t + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2}s^2 - 3s + 5 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。①と②から t を消去すると,

$$\frac{1}{2}s^2 - 3s + 5 \leq \frac{1}{4}s^2$$

$$\Leftrightarrow s^2 - 12s + 20 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (s-2)(s-10) \leq 0$$

$$\therefore 2 \leq s \leq 10$$

である。また, ②より $t = \frac{1}{2}(s-3)^2 + \frac{1}{2}$ であるから, t は $s=3$ のとき最小値 $\frac{1}{2}$, $s=10$ のとき最

大値 25 をとる。よって, $\frac{1}{2} \leq t \leq 25$ である。以上より, 求める範囲は

$$2 \leq x+y \leq 10, \frac{1}{2} \leq xy \leq 25$$

である。

$$(\text{答}) \quad 2 \leq x+y \leq 10, \frac{1}{2} \leq xy \leq 25$$

(2)

(1)と同様に,

$$(\alpha-3)^2 + (\beta-3)^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow \alpha\beta = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2 - 3(\alpha+\beta) + 5 \quad \dots \textcircled{3}$$

が得られる。また, α, β は 2 次方程式

$$x^2 - kx + \frac{5}{2} = 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

の 2 つの解である。よって, 解と係数の関係より,

$$\alpha + \beta = k, \alpha\beta = \frac{5}{2}$$

が成立し, これらを③に代入すると,

$$\frac{5}{2} = \frac{1}{2}k^2 - 3k + 5$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 6k + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (k-1)(k-5) = 0$$

$$\therefore k = 1, 5$$

となる。ここで, $x^2 - kx + \frac{5}{2} = 0$ は実数解を持つから, その判別式を考えて

$$k^2 \geq 10$$

が成立する。よって, $k=1$ は不適であり, $k=5$ である。このとき, ④について,

$$x^2 - 5x + \frac{5}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 5 = 0$$

$$\therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{15}}{2}$$

となる。 $\alpha < \beta$ より, $\alpha = \frac{5 - \sqrt{15}}{2}, \beta = \frac{5 + \sqrt{15}}{2}$ である。

$$(\text{答}) \quad k = 5, \alpha = \frac{5 - \sqrt{15}}{2}, \beta = \frac{5 + \sqrt{15}}{2}$$

(1)

点Pは線分OBを2:1に内分する点であるから、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\vec{b}$$

である。また、点Qについて、線分CPを $t:1-t$ ($0 < t < 1$) に内分する点であるので、

$$\overrightarrow{OQ} = t\overrightarrow{OP} + (1-t)\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}t\vec{b} + (1-t)\vec{c}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\vec{b}, \overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}t\vec{b} + (1-t)\vec{c}$$

(2)

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ であり、また、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ である。これらを用いると、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OQ}|^2 &= \left| \frac{2}{3}t\vec{b} + (1-t)\vec{c} \right|^2 \\ &= \frac{4}{9}t^2 |\vec{b}|^2 + \frac{4}{3}t(1-t)\vec{b} \cdot \vec{c} + (1-t)^2 |\vec{c}|^2 \\ &= \frac{7}{9}t^2 - \frac{4}{3}t + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{OQ}| = \frac{1}{3}\sqrt{7t^2 - 12t + 9}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} &= \vec{a} \cdot \left\{ \frac{2}{3}t\vec{b} + (1-t)\vec{c} \right\} \\ &= \frac{2}{3}t\vec{a} \cdot \vec{b} + (1-t)\vec{a} \cdot \vec{c} \\ &= -\frac{1}{6}t + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad |\overrightarrow{OQ}| = \frac{1}{3}\sqrt{7t^2 - 12t + 9}, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} = -\frac{1}{6}t + \frac{1}{2}$$

(3)

(2)の結果を用いると、

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OQ}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1 \cdot \left(\frac{7}{9}t^2 - \frac{4}{3}t + 1 \right) - \left(-\frac{1}{6}t + \frac{1}{2} \right)^2} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{9t^2 - 14t + 9} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S(t) = \frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{9t^2 - 14t + 9}$$

(4)

$9t^2 - 14t + 9 = 9\left(t - \frac{7}{9}\right)^2 + \frac{32}{9}$ であるから、 $9t^2 - 14t + 9$ は $0 < t < 1$ の範囲で $t = \frac{7}{9}$ のとき最小値

$\frac{32}{9}$ をとる。よって、 $t_0 = \frac{7}{9}$ であり、

$$S(t_0) = \frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{32}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{9}$$

である。

$$(\text{答}) \quad t_0 = \frac{7}{9}, S(t_0) = \frac{\sqrt{6}}{9}$$

(1)

それぞれ $n=1, 2, 3$ を代入して計算すると,

$$b_1 = \sum_{j=1}^1 \frac{1}{1+j} = \frac{1}{2}$$

$$b_2 = \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2+j} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$b_3 = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{3+j} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = \frac{7}{12}, b_3 = \frac{37}{60}$$

(2)

数学的帰納法を用いて, すべての自然数 n に対して $a_n = b_n$ が成り立つことを示す。

[1] $n=1$ のとき

このとき,

$$a_1 = \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

であり, (1) より $b_1 = \frac{1}{2}$ であるから, $a_1 = b_1$ が成り立つ。

[2] $a_k = b_k$ が成り立つと仮定したとき

a_{k+1} について考えると,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + \frac{1}{2(k+1)-1} - \frac{1}{2(k+1)} \\ &= b_k + \frac{1}{2k+1} - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k+2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k} \right) + \frac{1}{2k+1} - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k+2} \right) \\ &= \frac{1}{(k+1)+1} + \frac{1}{(k+1)+2} + \cdots + \frac{1}{(k+1)+k} + \frac{1}{(k+1)+(k+1)} \\ &= b_{k+1} \end{aligned}$$

が成り立つ。

以上[1], [2]より, すべての自然数 n に対して $a_n = b_n$ が成り立つことが示された。

(証明終)

(3)

(2)より, $a_n = b_n$ が成り立つから, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ である。以下, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を考える。区分別求積法を

用いて,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{1}{n+j} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{1+\frac{j}{n}} \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} \right) dx \\ &= [\log(1+x)]_0^1 \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

であり, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ より, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \log 2$ となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \log 2$$

(1)

$f(x) = \frac{\log x}{x^2}$ に関して,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot \log x}{x^4} = \frac{1 - 2 \log x}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{2}{x^2} \cdot x^3 - 3x^2(1 - 2 \log x)}{x^6} = \frac{-5 + 6 \log x}{x^4}$$

である。ゆえに,

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2 \log x = 0$$

$$\therefore x = e^{\frac{1}{2}}$$

および,

$$f''(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -5 + 6 \log x = 0$$

$$\therefore x = e^{\frac{5}{6}}$$

が成り立つ。また,

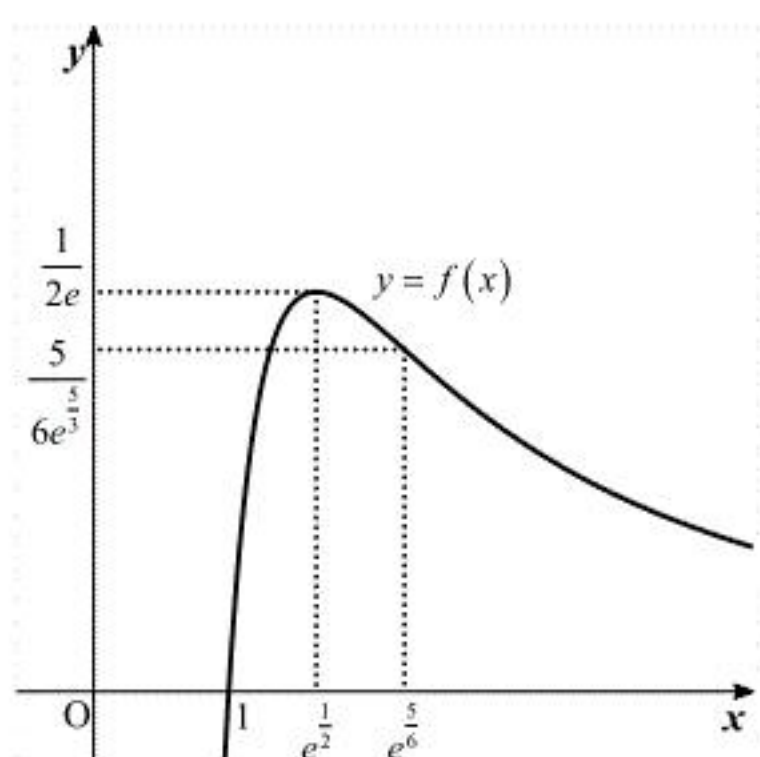
$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} \cdot \frac{1}{x} = 0$$

であるから, $f(x)$ の増減および凹凸は次の表のようになる。

x	(0)	...	$e^{\frac{1}{2}}$	...	$e^{\frac{5}{6}}$	...	(∞)
$f'(x)$		+	0	-	-	-	
$f''(x)$		-	-	-	0	+	
$f(x)$		$\curvearrowright$	$\frac{1}{2e}$	$\curvearrowleft$	$\frac{5}{6e^{\frac{5}{3}}}$	$\curvearrowright$	

以上より, $y = f(x)$ のグラフは次のようになる。



(答) 前図

(2)

曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ の交点を考える。2つの方程式を連立して,

$$f(x) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log x}{x^2} = a \log x$$

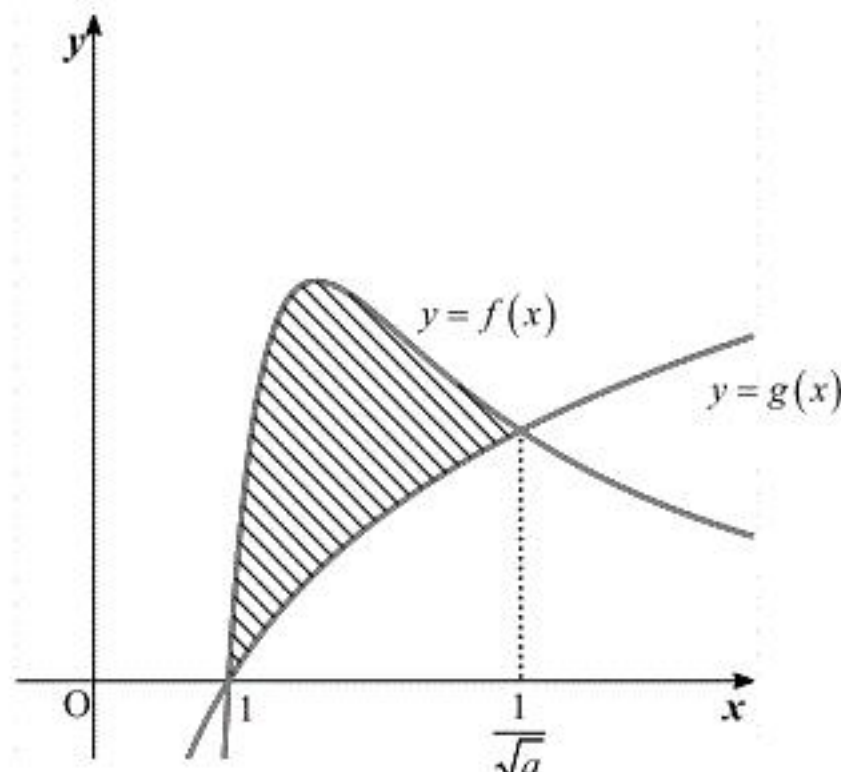
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^2} - a \right) \log x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} - \sqrt{a} \right) \left(\frac{1}{x} + \sqrt{a} \right) \log x = 0 \quad (\because a > 0)$$

となり, $x > 0$ より交点の x 座標は $x = 1, \frac{1}{\sqrt{a}}$ である。また, $0 < a < 1$ より $1 < \frac{1}{\sqrt{a}}$ であり,

$f(x) - g(x) = \left(\frac{1}{x} - \sqrt{a} \right) \left(\frac{1}{x} + \sqrt{a} \right) \log x$ より, $1 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$ において $f(x) \geq g(x)$ である。よって,

曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ で囲まれる部分は, 次のグラフの斜線部である。



したがって, 求める面積 $S(a)$ は

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_1^{\frac{1}{\sqrt{a}}} \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \int_1^{\frac{1}{\sqrt{a}}} \left(\frac{\log x}{x^2} - a \log x \right) dx \\ &= \int_1^{\frac{1}{\sqrt{a}}} \left(-\frac{1}{x} - ax \right)' \log x dx \\ &= \left[\left(-\frac{1}{x} - ax \right) \log x \right]_1^{\frac{1}{\sqrt{a}}} - \int_1^{\frac{1}{\sqrt{a}}} \left(-\frac{1}{x} - ax \right) \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \left(-\sqrt{a} - \sqrt{a} \right) \log \frac{1}{\sqrt{a}} - \left[\frac{1}{x} - ax \right]_1^{\frac{1}{\sqrt{a}}} \\ &= \sqrt{a} \log a - \left(\sqrt{a} - \sqrt{a} \right) + (1 - a) \\ &= 1 - a + \sqrt{a} \log a \end{aligned}$$

である。

(答) $S(a) = 1 - a + \sqrt{a} \log a$

(3)

$t = \frac{1}{\sqrt{a}}$ とおくと, $a \rightarrow +0$ のとき $t \rightarrow \infty$ である。ここで,

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow +0} \sqrt{a} \log a &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{1}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2 \log t}{t} \\ &= -2 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。したがって,

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow +0} S(a) &= \lim_{a \rightarrow +0} (1 - a + \sqrt{a} \log a) \\ &= 1 - 0 + 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。

(答) $\lim_{a \rightarrow +0} S(a) = 1$