

【解答】

(1)	ア	
	−1	
(2)	イ	
	2³⁴	
(3)	ウ	
	5√3	
(4)	エ	
	6√10	
(5)	オ	カ
	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
(6)	キ	
	74 個	
(7)	ク	
	$-\frac{1}{3}$	

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}x-y&=t \text{ とおく. } y=x-t \text{ を問題文の等式に代入すると,} \\x^2+y^2+2xy+2x-2y+2&=0 \\ \Leftrightarrow x^2+(x-t)^2+2x(x-t)+2x-2(x-t)+2&=0 \\ \Leftrightarrow 4x^2-4tx+(t^2+2t+2)&=0\end{aligned}$$

となる. この式の, x についての判別式を D とおくと, $\frac{D}{4} \geq 0$ であればよい.

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(-2t)^2-4(t^2+2t+2) \\&=-8t-8\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&\geq 0 \\ \Leftrightarrow -8t-8&\geq 0 \\ \Leftrightarrow t&\leq -1\end{aligned}$$

となる. ここで $t=-1$ とすると

$$\begin{aligned}4x^2-4tx+(t^2+2t+2)&=0 \\ \Leftrightarrow 4x^2+4x+1&=0 \\ \Leftrightarrow (2x+1)^2&=0 \\ \Leftrightarrow x&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

であるから, $y=\frac{1}{2}$ となる. よって $t=-1$ のとき実数 x, y が存在するから, $x-y$ の最大値は

−1 である.

(2)

漸化式より, 全ての自然数 n について明らかに $a_n \neq 0$ である. このもとで $n \geq 1$ において,

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+2}}&=\frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n&=0 \left(a_{n+2} \neq 0\right) \\ \Leftrightarrow a_{n+2}-2a_{n+1}&=2(a_{n+1}-2a_n)\end{aligned}$$

と変形できる. よって,

$$\begin{aligned}a_{n+1}-2a_n&=2(a_n-2a_{n-1}) \\&=2^2(a_{n-1}-2a_{n-2}) \\&=\cdots \\&=2^{n-1}(a_2-2a_1) \\&=2^{n-1}(3-2 \cdot 1) \\&=2^{n-1}\end{aligned}$$

となる. したがって, $a_{n+1}=2a_n+2^{n-1}$ であるから, $n \geq 2$ において,

$$\begin{aligned}a_n&=2a_{n-1}+2^{n-2} \\&=2(2a_{n-2}+2^{n-3})+2^{n-2} \\&=2^2 \cdot a_{n-2}+2 \cdot 2^{n-2} \\&=2^2(2a_{n-3}+2^{n-4})+2 \cdot 2^{n-2} \\&=2^3 \cdot a_{n-3}+2^{n-2}+2 \cdot 2^{n-2} \\&=2^3 \cdot a_{n-3}+3 \cdot 2^{n-2} \\&=\cdots \\&=2^{n-1} \cdot a_1+(n-1) \cdot 2^{n-2} \\&=2^{n-1}+(n-1) \cdot 2^{n-2} \\&=(n+1) \cdot 2^{n-2}\end{aligned}$$

となる. よって,

$$\begin{aligned}a_{31}&=(31+1) \cdot 2^{31-2} \\&=32 \cdot 2^{29} \\&=2^5 \cdot 2^{29} \\&=2^{34}\end{aligned}$$

となる.

(3)

$$\begin{aligned}\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2&=0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-\frac{\alpha}{\beta}+1&=0 \left(\because \beta \neq 0\right)\end{aligned}$$

である. このとき, $\frac{\alpha}{\beta}$ は $x^2-x+1=0$ の解の一つである. この式を解くと,

$$\begin{aligned}x&=\frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \\&=\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

となる. よって, $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3}$ である. すなわち, 点 α は点 β を原点中心とし

て $\frac{\pi}{3}$, または $-\frac{\pi}{3}$ 回転させた点である. よって, $|\alpha|=|\beta|$ であり, かつ原点について, α, β の

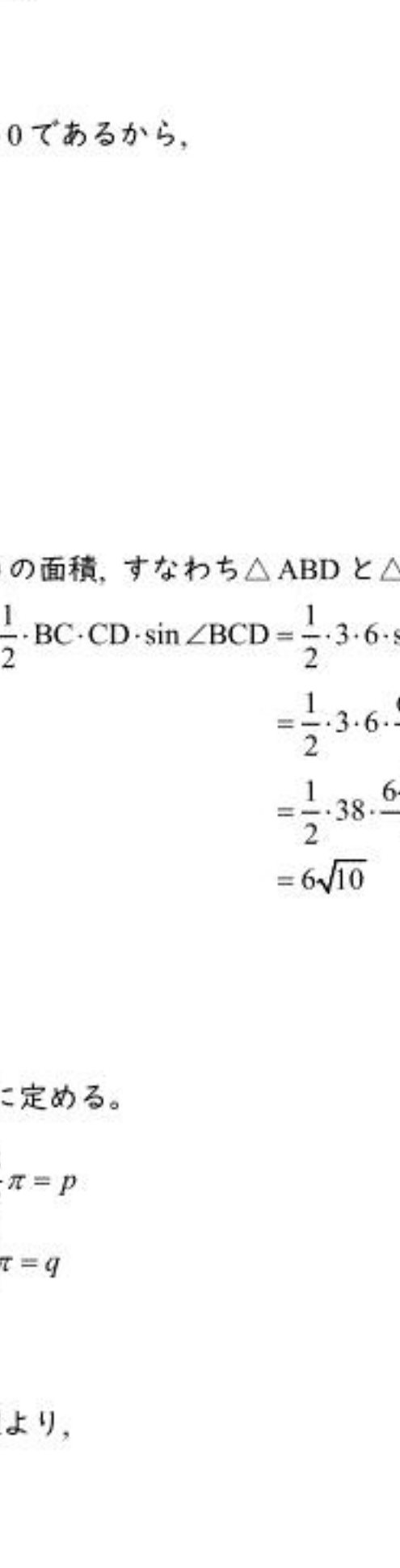
なす角は $\frac{\pi}{3}$ であるから, $0, \alpha, \beta$ を頂点に持つ三角形は正三角形である. ここで, $|\alpha-\beta|$ は点

α と点 β の距離を表すから, 求める三角形の面積は,

$$2\sqrt{3} \cdot \left(2\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}=5\sqrt{3}$$

である.

(4)



∠BAD=θとおくと, 四角形 ABCD は円に内接するから, ∠BCD=π−θである. このとき,

BD² を θ を用いて表すことを考える. はじめに, △ ABD について, 余弦定理より,

$$\begin{aligned}BD^2&=AB^2+AD^2-2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos \angle BAD \\&=3^2+6^2-2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos \theta \\&=45-36 \cos \theta\end{aligned}$$

となる. 次に, △ BCD について, 余弦定理より,

$$\begin{aligned}BD^2&=BC^2+CD^2-2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos \angle BCD \\&=4^2+5^2-2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos (\pi-\theta) \\&=41+40 \cos \theta\end{aligned}$$

となる. よって,

$$\begin{aligned}45-36 \cos \theta&=41+40 \cos \theta \\ \Leftrightarrow \cos \theta&=\frac{1}{19}\end{aligned}$$

となる. $0<\theta<\pi$ より, $\sin \theta>0$ であるから,

$$\begin{aligned}\sin \theta&=\sqrt{1-\cos ^2 \theta} \\&=\sqrt{1-\left(\frac{1}{19}\right)^2} \\&=\frac{\sqrt{360}}{19} \\&=\frac{6 \sqrt{10}}{19}\end{aligned}$$

である. よって, 四角形 ABCD の面積, すなわち △ ABD と △ BCD の面積の和は,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD+\frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD \cdot \sin \angle BCD&=\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \sin \theta+\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin (\pi-\theta) \\&=\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{6 \sqrt{10}}{19}+\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{6 \sqrt{10}}{19} \\&=\frac{1}{2} \cdot 38 \cdot \frac{6 \sqrt{10}}{19} \\&=6 \sqrt{10}\end{aligned}$$

である.

(5)

p, q, α をそれぞれ以下の通りに定める.

$$\begin{cases}\cos \frac{2}{7} \pi+\cos \frac{4}{7} \pi+\cos \frac{8}{7} \pi=p \\ \sin \frac{2}{7} \pi+\sin \frac{4}{7} \pi+\sin \frac{8}{7} \pi=q \\ \cos \frac{2}{7} \pi+i \sin \frac{2}{7} \pi=\alpha\end{cases}$$

このとき, ド・モアブルの定理より,

$$\begin{aligned}\cos \frac{4}{7} \pi+i \sin \frac{4}{7} \pi&=\alpha^2 \\ \cos \frac{8}{7} \pi+i \sin \frac{8}{7} \pi&=\alpha^4\end{aligned}$$

が成り立ち, p, q はそれぞれ, $\alpha+\alpha^2+\alpha^4$ の実部, 虚部と一致する. すなわち,

$$\alpha+\alpha^2+\alpha^4=p+qi$$

である. またド・モアブルの定理より, $\alpha^7=1$ が成り立つ. このとき,

$$\begin{aligned}\alpha^7-1&=0 \\ \Leftrightarrow (\alpha-1)\left(\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1\right)&=0\end{aligned}$$

となる. $\sin \frac{2}{7} \pi \neq 0$ より $\alpha \neq 1$ (実数) であるから,

$$\begin{aligned}\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1&=0 \\ \Leftrightarrow \alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha&=-1 \\ \Leftrightarrow\left(\cos \frac{2}{7} \pi+\cos \frac{4}{7} \pi+\cdots+\cos \frac{12}{7} \pi\right)+i\left(\sin \frac{2}{7} \pi+\sin \frac{4}{7} \pi+\cdots+\sin \frac{12}{7} \pi\right)&=-1 \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで,

$$\begin{cases}\cos \frac{2}{7} \pi=\cos \frac{12}{7} \pi, \cos \frac{4}{7} \pi=\cos \frac{10}{7} \pi, \cos \frac{8}{7} \pi=\cos \frac{6}{7} \pi \\ \sin \frac{2}{7} \pi=-\sin \frac{12}{7} \pi, \sin \frac{4}{7} \pi=-\sin \frac{10}{7} \pi, \sin \frac{8}{7} \pi=-\sin \frac{6}{7} \pi\end{cases} \quad \cdots \textcircled{2}$$

であるから,

$$\begin{cases}\cos \frac{2}{7} \pi+\cos \frac{4}{7} \pi+\cdots+\cos \frac{12}{7} \pi=2 p \\ \sin \frac{2}{7} \pi+\sin \frac{4}{7} \pi+\cdots+\sin \frac{12}{7} \pi=0\end{cases}$$

が成り立つ. これらを①の式に代入すると, $2 p=-1$ となる. よって, $p=-\frac{1}{2}$ である. 次に,

$\alpha^7=1$ を用いると,

$$\begin{aligned}\left(\alpha+\alpha^2+\alpha^4\right)\left(\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6\right)&=\alpha^4+\alpha^6+\alpha^7+\alpha^5+\alpha^7+\alpha^8+\alpha^7+\alpha^9+\alpha^{10} \\&=\left(\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^6\right)+3 \alpha^7 \\&=-1+3 \\&=2\end{aligned}$$

となる. 一方, ②より, $\alpha+\alpha^2+\alpha^4=p+qi, \alpha^3+\alpha^5+\alpha^6=p-qi$ であるから,

$$\begin{aligned}\left(\alpha+\alpha^2+\alpha^4\right)\left(\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6\right)&=2 \\ \Leftrightarrow\left(-\frac{1}{2}+qi\right)\left(-\frac{1}{2}-qi\right)&=2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}+q^2&=2 \\ \Leftrightarrow q&=\pm \frac{\sqrt{7}}{2}\end{aligned}$$

が成り立つ. q について,

$$\begin{aligned}q&=\sin \frac{2}{7} \pi+\sin \frac{4}{7} \pi+\sin \frac{8}{7} \pi \\&=\sin \frac{2}{7} \pi+\sin \frac{4}{7} \pi-\sin \frac{\pi}{7}\end{aligned}$$

と変形できる. $\sin \frac{2}{7} \pi>\sin \frac{\pi}{7}$ より $q>0$ であるから, $q=\frac{\sqrt{7}}{2}$ である.

(6)

合成数は, 2 以上の自然数のうち, 素数でないものを表す. 4 以上100 以下の自然数のうち,

素数であるものは23 個ある. よって, 4 以上100 以下の合成数は,

$$(100-4+1)-23=74$$

より, 74 個ある.

(7)

$(A-B)\left(A^2+A B+B^2\right)=A^3-B^3$ と変形できることを利用すると,

$$\begin{aligned}\lim _{n \rightarrow \infty}\left(\sqrt[3]{n^9-n^6}-n^3\right)&=\lim _{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt[3]{n^9-n^6}-n^3\right)\left\{\left(\sqrt[3]{n^9-n^6}\right)^2+\sqrt[3]{n^9-n^6} \cdot n^3+n^6\right\}}{\left(\sqrt[3]{n^9-n^6}\right)^2+\sqrt[3]{n^9-n^6} \cdot n^3+n^6} \\&=\lim _{n \rightarrow \infty} \frac{n^9-n^6-n^9}{\left(\sqrt[3]{n^9-n^6}\right)^2+\sqrt[3]{n^9-n^6} \cdot n^3+n^6} \\&=\lim _{n \rightarrow \infty} \frac{-n^6}{\left(\sqrt[3]{n^9-n^6}\right)^2+\sqrt[3]{n^9-n^6} \cdot n^3+n^6} \\&=\lim _{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^3}}\right)^2+\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^3}}+1} \\&=\frac{-1}{1+1+1} \\&=-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる.

2

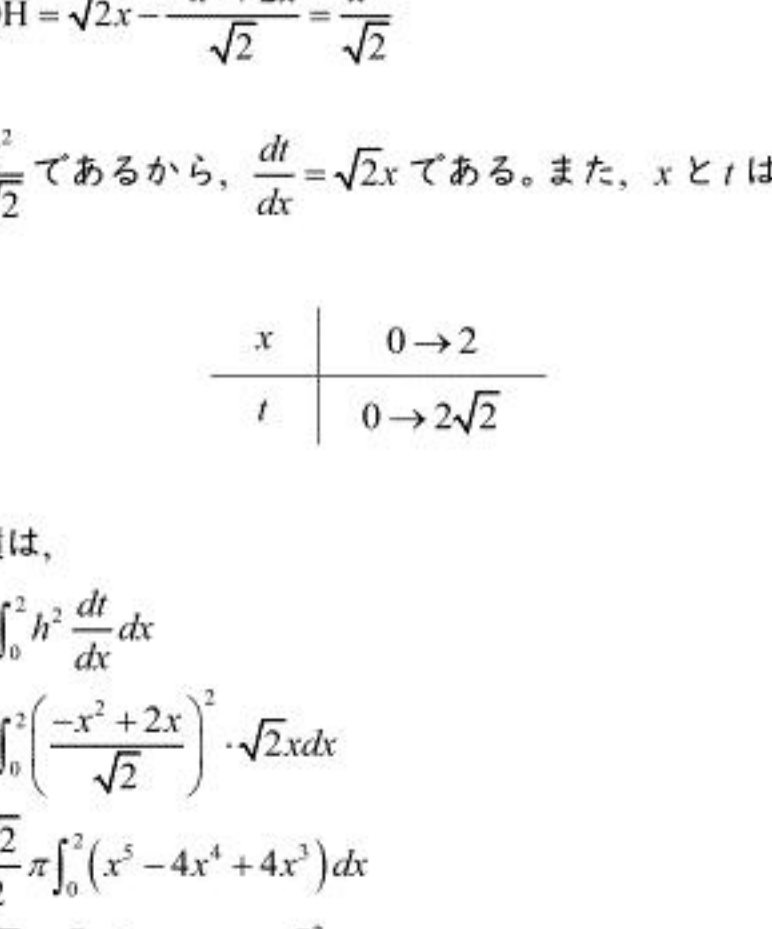
【解答】

(1)	ケ	
	$\frac{8\sqrt{2}}{15}\pi$	
(2)	コ	
	0個	
(3)	サ	
	-9	
(4)	シ	
	$\frac{\pi}{2}$	
(5)	ス	
	$-\frac{4}{3}+\frac{\pi}{2}$	
(6)	セ	
	$\frac{\sqrt{58}}{2}$	
(7)	ソ	タ
	256	5036

【解説】

(1)

$0 \leq x \leq 2$ とする。放物線 $y = x^2 - x$ 上の点 $P(x, x^2 - x)$ から、直線 $y = x$ 上に $PH \perp OH$ となる点 H をおき、 $PH = h, OH = t$ と定める。さらに、点 $Q(x, x)$ を定める。これらを図示すると、下図のようになる。



このとき、

$$\begin{cases} PQ = -x^2 + 2x \\ PH = QH = \frac{-x^2 + 2x}{\sqrt{2}} (=h) \\ OH = OQ - QH = \sqrt{2}x - \frac{-x^2 + 2x}{\sqrt{2}} = \frac{x^2}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

となる。よって、 $t = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$ であるから、 $\frac{dt}{dx} = \sqrt{2}x$ である。また、 x と t は下表のように対応する。

x	$0 \rightarrow 2$
t	$0 \rightarrow 2\sqrt{2}$

以上より、求める体積は、

$$\begin{aligned} \pi \int_0^{2\sqrt{2}} h^2 dt &= \pi \int_0^2 \frac{dt}{dx} \frac{dx}{dt} dx \\ &= \pi \int_0^2 \left(\frac{-x^2 + 2x}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \sqrt{2} x dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \int_0^2 (x^5 - 4x^4 + 4x^3) dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \cdot \left[\frac{x^6}{6} - \frac{4}{5}x^5 + x^4 \right]_0^2 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \cdot \left(\frac{32}{3} - \frac{128}{5} + 16 \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \cdot \frac{16}{15} \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{15} \pi \end{aligned}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned} e^x &= \pi^x + \|x - 2\| - 1 \\ \Leftrightarrow e^x - \pi^x &= \|x - 2\| - 1 \end{aligned}$$

である。 $f(x) = e^x - \pi^x, g(x) = \|x - 2\| - 1$ とおく。ここで、 x について場合分けをする。

[1] $x \geq 0$ のとき

$e < \pi$ であるから、 $f(x) < 0$ である。一方、 $g(x)$ は式全体に絶対値記号がついているため、 $g(x) \geq 0$ である。よって、 $x \geq 0$ では解を持たない。

[2] $x < 0$ のとき

$$\begin{aligned} g(x) &\text{について、} \\ g(x) &= \|x - 2\| - 1 \\ &= |-(x - 2)| - 1 \\ &= |-x + 1| \\ &= -x + 1 \end{aligned}$$

である。よって、 $x < 0$ において $g(x) > 1$ が成り立つ。一方、 $f(x)$ について、

$$f'(x) = e^x - \pi^x \log \pi$$

となるから、

$$f'(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{e}{\pi} \right)^x = \log \pi$$
$$\Leftrightarrow x \log \frac{e}{\pi} = \log(\log \pi)$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\log(\log \pi)}{1 - \log \pi}$$

である。このとき、 $y = f(x)$ の増減表は下のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{\log(\log \pi)}{1 - \log \pi}$	$\cdots$	(0)
$f'(x)$	+	0	-	
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	(0)

よって、 $f(x)$ は $x = \frac{\log(\log \pi)}{1 - \log \pi}$ で極大値をとる。ここで $\frac{\log(\log \pi)}{1 - \log \pi} = \alpha$ とおく。 $f'(\alpha) = 0$

より、 $\left(\frac{e}{\pi} \right)^\alpha = \log \pi$ であるから、

$$\begin{aligned} e^\alpha - \pi^\alpha &= \pi^\alpha (\log \pi - 1) \\ \text{である。ここで、} \alpha &< 0, 1 < \pi \text{ より } 0 < \pi^\alpha < 1 \text{ であり、また } e < \pi < e^2 \text{ であるから、} \\ 1 &< \log \pi < 2, \text{ すなわち } 0 < \log \pi - 1 < 1 \text{ である。よって、} e^\alpha - \pi^\alpha < 1 \text{ が成り立つ。ところで、} \\ g(x) &\text{ は } x < 0 \text{ において } g(x) > 1 \text{ であるから、} x < 0 \text{ では } y = f(x) \text{ と } y = g(x) \text{ は交点を持たない。すなわち、} x < 0 \text{ では解を持たない。} \end{aligned}$$

以上[1],[2]より、方程式 $e^x = \pi^x + \|x - 2\| - 1$ の解の個数は0個である。

(3)

式中の二重根号をそれぞれ外すと、

$$\begin{aligned} \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} &= \sqrt{7 - 2\sqrt{12}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{4} - \sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{4} - \sqrt{3} \\ &= 2 - \sqrt{3} \\ \sqrt{36 + 9\sqrt{15}} &= \sqrt{\frac{72 + 2\sqrt{9^2 \cdot 15}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{(\sqrt{9 \cdot 3} + \sqrt{9 \cdot 5})^2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{3\sqrt{3} + 3\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{5})}{2} \end{aligned}$$

である。よって、

$$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{36 + 9\sqrt{15}} = 2 - \sqrt{3} - \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{5})}{2}$$

である。ここで、 $1.41 < \sqrt{2} < 1.42, 1.73 < \sqrt{3} < 1.74, 2.23 < \sqrt{5} < 2.24$ より、

$$-8.2174 < 2 - \sqrt{3} - \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{5})}{2} < -8.1054$$

となる。ゆえに、

$$\left[\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{36 + 9\sqrt{15}} \right] = -9$$

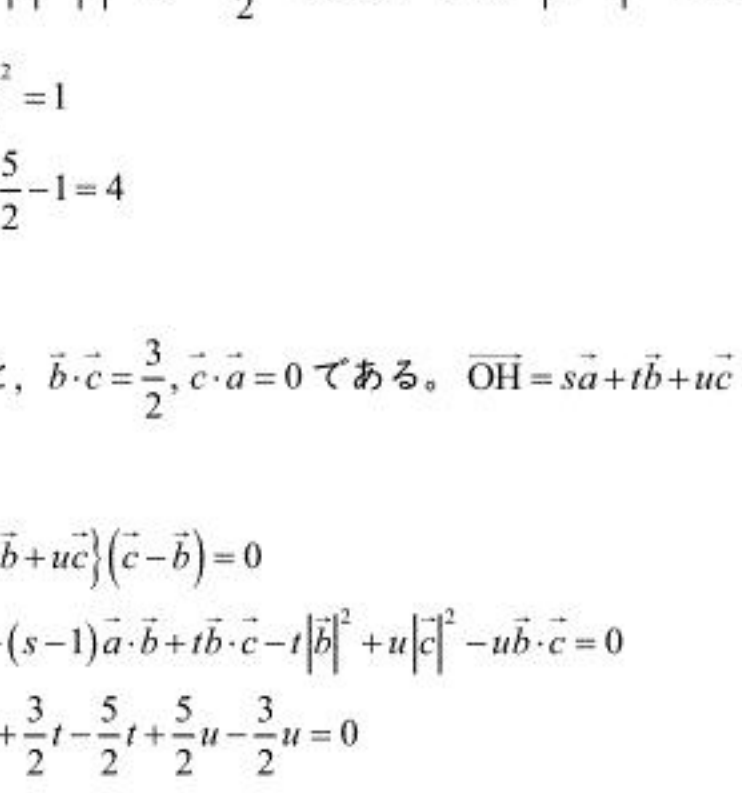
である。

(4)

$t = x - 100$ とおくと $dt = dx$ であり、 $x: 99 \rightarrow 101$ で $t: -1 \rightarrow 1$ であるから

$$\begin{aligned} \int_{99}^{101} \sqrt{(x - 99)(101 - x)} dx &= \int_{-1}^1 \sqrt{(t + 1)(1 - t)} dt \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} dt \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} dt$ は下図の斜線部の面積を表す。



すなわち、原点中心、半径1の円の $y \geq 0$ の領域を表す。よって、

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} dt = 1^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$$

となる。

(5)

$t = \tan x$ とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \tan^2 x + 1 \\ &= t^2 + 1 \end{aligned}$$

となる。また、 x と t は下表のように対応する。

x	$-\frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{4}$
t	$-1 \rightarrow 1$

よって、

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x dx &= \int_{-1}^1 \tan^4 x \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_{-1}^1 \frac{t^4}{t^2 + 1} dt \\ &= \int_{-1}^1 \frac{(t^2 - 1)(t^2 + 1) + 1}{t^2 + 1} dt \\ &= \int_{-1}^1 \left\{ (t^2 - 1) + \frac{1}{t^2 + 1} \right\} dt \\ &= \int_{-1}^1 (t^2 - 1) dt + \int_{-1}^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt \\ &= \left[\frac{1}{3} t^3 - t \right]_{-1}^1 + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 1 dx \\ &= -\frac{4}{3} + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

となる。

(6)



$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ 、 $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とおく。 $\triangle ABC$ について、余弦定理より、

$$\begin{aligned} \cos \angle BAC &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} \\ &= \frac{1 + 5 - 2}{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{5}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \sin \angle BAC &= \sqrt{1^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

である。 $\triangle ABC$ について、正弦定理より、

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{BC}{\sin \angle BAC} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10} \\ \therefore R &= \frac{\sqrt{10}}{2} \end{aligned}$$

である。よって、 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = R = \frac{\sqrt{10}}{2}$ である。また、 $|\vec{a} - \vec{b}| = 1$ より、

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 2\vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{5}{2} + \frac{5}{2} - 1 = 4 \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= 2 \end{aligned}$$

となる。同様に解くと、 $\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{3}{2}, \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ である。 $\vec{OH} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$ とおくと、 $\vec{AH} \perp \vec{BC}$ より、

$$\begin{aligned} \vec{AH} \cdot \vec{BC} &= 0 \\ \Leftrightarrow \{(s-1)\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}\} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (s-1)\vec{a} \cdot \vec{c} - (s-1)\vec{a} \cdot \vec{b} + t\vec{b} \cdot \vec{c} - t|\vec{b}|^2 + u|\vec{c}|^2 - u\vec{b} \cdot \vec{c} &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 - 2(s-1) + \frac{3}{2}t - \frac{5}{2}t + \frac{5}{2}u - \frac{3}{2}u &= 0 \\ \Leftrightarrow 2s + t - u &= 2 \end{aligned}$$

となる。同様に、

$$\begin{aligned} \vec{BH} \perp \vec{AC} &\Leftrightarrow 5s + t - 5u = 1 \\ \vec{CH} \perp \vec{AB} &\Leftrightarrow s - t - 3u = -3 \end{aligned}$$

が導かれる。得られた三式を連立して解くと、 $s = t = u = 1$ となる。よって、 $\vec{OH} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ である。したがって、

$$\begin{aligned} |\vec{OH}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= \frac{5}{2} + \frac{5}{2} + \frac{5}{2} + 2 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{3}{2} + 0 \\ &= \frac{29}{2} \\ \therefore |\vec{OH}| &= \frac{\sqrt{29}}{2} \end{aligned}$$

となる。ゆえに、

$$|\vec{OH}| = \sqrt{\frac{29}{2}} = \frac{\sqrt{58}}{2}$$

である。

(7)

円周上に点が n 個あるときの領域の数を a_n とおく。円周上の点 $P_1, P_2, \dots, P_n$ に点 P_{n+1} を加えるとする。このとき P_{n+1} と $P_1 \sim P_n$ の内から一点 $P_k (1 \leq k \leq n)$ を結んだ時に新たに生じる領域を考える。ただし、点 $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$ はこの順に並んでいるものとする。

[1] $2 \leq k \leq n-1$ のとき

線分 $P_{n+1}P_k$ が交点をもち線分は、 $P_1 \sim P_{k-1}$ の内の一点と、 $P_{k+1} \sim P_n$ の内の一点を結んだ線分である。そのような線分は全部で $(k-1)(n-k)$ 本あるから、線分 $P_{n+1}P_k$ の持つ交点の数は、 $(k-1)(n-k)$ 個である。よって、線分 $P_{n+1}P_k$ は $(k-1)(n-k)+1$ 本に分割される。すなわち、 $(k-1)(n-k)+1$ 個の領域が二つに分割されるため、領域の数は $(k-1)(n-k)+1$ 個増える。

[2] $k=1, n$ のとき

線分 $P_{n+1}P_k$ は他の線分と交点を持たないため、この線分により領域は1つ増える。これは[1]において $k=1, n$ とおいたときと一致する。

以上[1],[2]より、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + \sum_{k=1}^n \{(k-1)(n-k)+1\} \\ &= a_n + \sum_{k=1}^n \{-k^2 + (n+1)k - (n-1)\} \\ &= a_n - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1) \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - (n-1)n \\ &= a_n + \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{4}{3}n \end{aligned}$$

となる。よって、 $n \geq 2$ において、

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{4}{3}k \right) \\ &= 1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4}(n-1)^2 n^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}(n-1) \cdot n \cdot (2n-1) + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}(n-1)n \\ &= \frac{1}{24}n^2(n-1)^2 - \frac{1}{12}n(n-1)(2n-1) + \frac{2}{3}n(n-1) + 1 \end{aligned}$$

である。これらに $n=10, 20$ をそれぞれ代入すると、

$$\begin{aligned} a_{10} &= \frac{1}{24} \cdot 10^2 \cdot 9^2 - \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 9 \cdot 19 + \frac{2}{3} \cdot 10 \cdot 9 + 1 \\ &= \frac{675}{2} - \frac{285}{2} + 60 + 1 \\ &= 256 \\ a_{20} &= \frac{1}{24} \cdot 20^2 \cdot 19^2 - \frac{1}{12} \cdot 20 \cdot 19 \cdot 39 + \frac{2}{3} \cdot 20 \cdot 19 + 1 \\ &= 19 \left(\frac{950}{3} - 65 + \frac{40}{3} \right) + 1 \\ &= 19 \cdot 265 + 1 \\ &= 5036 \end{aligned}$$

となる。

24本のマッチ棒が入っている箱から順にA, B, ..., Gと箱に名前を付け、これらが時計回りに順に配置してあるとする。このとき、時計回りにマッチ棒を動かす方向を正とする。AからBへ移す本数を x 本とする(ただし x は整数)。このとき、Bでは合計5本増加すればよいから、 $C \rightarrow B$ へは $5-x$ 本移せばよい。よって、 $B \rightarrow C$ へは $x-5$ 本移すことになる。同様に考えると、

$C \rightarrow D$ は $x-8$ 本

$D \rightarrow E$ は $x-15$ 本

$E \rightarrow F$ は $x-7$ 本

$F \rightarrow G$ は $x-13$ 本

$G \rightarrow A$ は $x-4$ 本

移すことになる。よって、輸送量は、

$$|x| + |x-5| + |x-8| + |x-15| + |x-7| + |x-13| + |x-4| \text{ 本}$$

である。これを $f(x)$ とおく。ここで、 $f(x)$ の x の係数の符号に注目すると、 $x < 7$ では負、 $x = 7$ では0、 $x > 7$ では正であるから、 $y = f(x)$ のグラフは、 $x \leq 7$ では単調減少、 $x \geq 7$ では単調増加である。よって、 $y = f(x)$ は $x = 7$ で最小値をとる。

$$f(7) = 7 + 2 + 1 + 8 + 0 + 6 + 3 = 27$$

であるから、輸送量の最小値は27である。