

1

【解答】

(1)	ア
	1
(2)	イ
	$\frac{1}{5}$
(3)	ウ
	$\frac{4\sqrt{10}}{3}$
(4)	エ
	24
(5)	オ
	8
(6)	カ
	$\frac{\sqrt{2}}{12}$
(7)	キ
	4
(8)	ク
	961
(9)	ケ
	$\frac{7\sqrt{3}}{3}$
(10)	コ
	$\sqrt{3}$
(11)	サ
	e
(12)	シ
	$\frac{2}{3}$

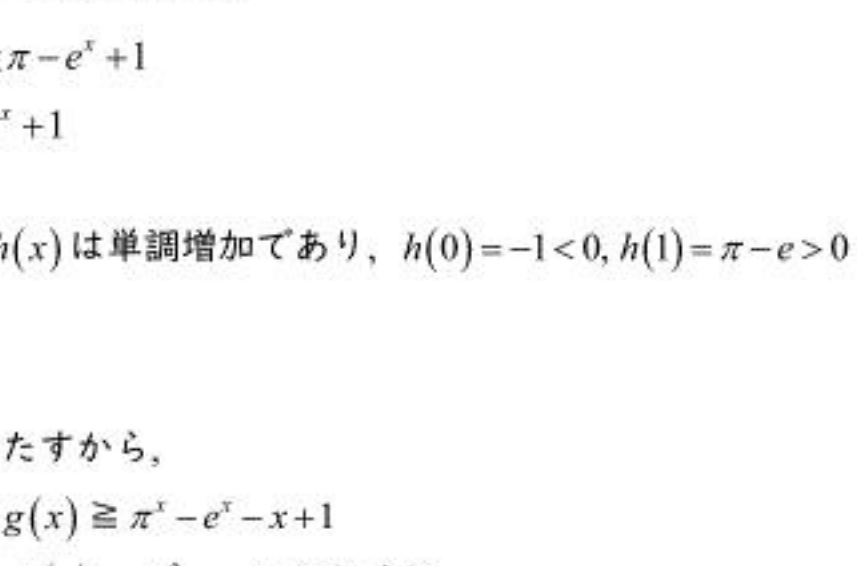
【解説】

(1)

$$\begin{aligned}\pi^x &= e^x + ||x-2|-1| \\ \Leftrightarrow \pi^x - e^x &= ||x-2|-1|\end{aligned}$$

より、 $f(x)=\pi^x-e^x$ 、 $g(x)=||x-2|-1|$ 、 $h(x)=f(x)-g(x)$ とおき、2式 $y=f(x)$ 、 $y=g(x)$ の概

形を図示すると下図のようになる。



[1] $x<0$ のとき

$f(x)<0$ かつ $g(x)>0$ であるから、この範囲で解をもたない。

[2] $0\leq x<1$ のとき

$h(x)=\pi^x-e^x+x-1$ であるから、

$$\begin{aligned}h'(x) &= \pi^x \log \pi - e^x + 1 \\ &> \pi^x - e^x + 1 \\ &> 0\end{aligned}$$

となる。よって $h(x)$ は単調増加であり、 $h(0)=-1<0$ 、 $h(1)=\pi-e>0$ よりこの範囲で解

を1つもつ。

[3] $1\leq x$ のとき

$g(x)\leq x-1$ を満たすから、

$$h(x)=f(x)-g(x)\geq \pi^x-e^x-x+1$$

である。さらに、 $k(x)=e^{x-2}-x+1$ とおくと、

$$k'(x)=e^{x-2}-1$$

より、 $k(x)$ の増減は以下のようになる。

x	1	...	2	...
$k'(x)$	-	-	0	+
$k(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

したがって、 $k(x)\geq k(2)=0$ であるから、 $e^{x-2}\geq x-1$ が成り立つ。よって、

$$h(x)\geq \pi^x-e^x-x+1\geq \pi^x-e^x-e^{x-2}$$

である。ここで、 $x\geq 1$ より、

$$\begin{aligned}\pi^x - e^x - e^{x-2} &= e^x \left\{ \left(\frac{\pi}{e} \right)^x - \left(1 + \frac{1}{e^2} \right) \right\} \\ &\geq \frac{\pi}{e} - \left(1 + \frac{1}{e^2} \right) \left(\because e>1, \frac{\pi}{e}>1 \right) \\ &= \frac{3.14}{2.72} - \left(1 + \frac{1}{2.72^2} \right) \\ &= 0.0172\dots \\ &> 0\end{aligned}$$

より、 $h(x)>0$ が成り立つから、この範囲で解を持たない。

以上、[1]、[2]、[3]より、求める解の個数は1つである。

(2)

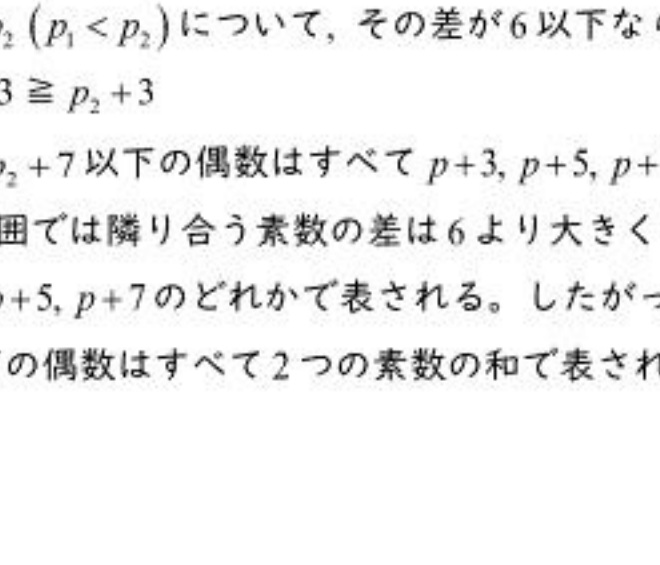
区分求積法より、

$$\begin{aligned}\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4}{n^5} &= \lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left(\frac{k}{n}\right)^4 \\ &= \int_0^1 x^4 dx \\ &= \left[\frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

となる。

(3)

直線AIと辺BCの交点を点Dとして図示すると下図のようになる。



△ABCはAB=CAの二等辺三角形であるから、BD=CD=4であり、△ACDについて三平方の定理より、

$$\begin{aligned}AD &= \sqrt{CA^2 - CD^2} \\ &= \sqrt{5^2 - 4^2} \\ &= 3\end{aligned}$$

となる。また、線分CIは∠ACDの二等分線となるから、

$$\begin{aligned}AI:DI &= CA:CD \\ \Leftrightarrow AI:DI &= 5:4\end{aligned}$$

である。したがって

$$DI = 3 \cdot \frac{4}{5+4} = \frac{4}{3}$$

である。このとき、△CDIについて三平方の定理より、

$$\begin{aligned}CI &= \sqrt{DI^2 + CD^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4^2} \\ &= \frac{4\sqrt{10}}{3}\end{aligned}$$

となる。

(4)

奇数のある素数 p を用いて $p+3$ 、 $p+5$ 、 $p+7$ のどれかで偶数を表すことを考える。このとき、

隣り合う2つの素数 p_1 、 p_2 ($p_1 < p_2$)について、その差が6以下ならば

$$p_1+9=(p_1+6)+3\geq p_2+3$$

となるから、 p_1+3 以上 p_2+7 以下の偶数はすべて $p+3$ 、 $p+5$ 、 $p+7$ のどれかで表される。こ

こで、3以上43以下の範囲では隣り合う素数の差は6より大きくならないので6以上50以

下の偶数はすべて $p+3$ 、 $p+5$ 、 $p+7$ のどれかで表される。したがって、 $4=2+2$ と表せること

も考えると4以上50以下の偶数はすべて2つの素数の和で表され、その個数は

$$\frac{50-4}{2}+1=24$$

である。

(5)

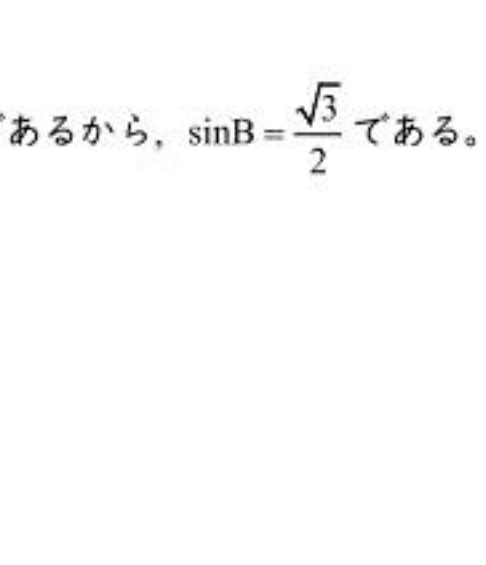
$x=\cos 3t$ の周期は $\frac{2}{3}\pi$ 、 $y=\sin 4t$ の周期は $\frac{1}{2}\pi$ であるから、周期 2π で C 上を一周する。よつ

て、 C 上を1周するとき $y=\sin 4t$ は4周する。 $0\leq t<\frac{1}{2}\pi$ の範囲で $y=\sin 4t$ と $y=\frac{1}{3}$ は交点

を2つ持つので、求める交点の個数は $2\cdot 4=8$ (個)である。

(6)

1辺の長さが1の正四面体は、下図より、



1辺の長さが $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の立方体から、4つの三角錐を取り除いた図形である。よって、その体積

は、

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - 4\left\{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

である。

(7)

四面体ABCDの体積は平行六面体の面積の $\frac{1}{6}$ である。△BCDを底面とすると、 x 軸はこの

平面に垂直であり、四面体の高さは1となる。底面の面積は、 $\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$ 、 $\overrightarrow{BD}=(0,3,2)$ よ

り

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{BC}|^2|\overrightarrow{BD}|^2-(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD})^2} &= \frac{1}{2}\sqrt{(2^2)\cdot(3^2+2^2)-(2\cdot3)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{16} \\ &= 2\end{aligned}$$

であるから、求める平行六面体の体積は

$$\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2\right)\cdot 6=4$$

となる。

(8)

100円硬貨を k ($k=0,1,\cdots,30$)枚用いるとき、残りの $3000-100k$ 円を支払う方法は、50円硬

貨の枚数により、0枚から $60-2k$ 枚までの $61-2k$ 通り存在する。よって、支払い方の総数

は、

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{30}(61-2k) &= 61\cdot 31 - 2\cdot \frac{1}{2}\cdot 30\cdot (30+1) \\ &= (61-30)\cdot 31 \\ &= 31^2 \\ &= 961\end{aligned}$$

(9)

AB=3、BC=5、CA=7であるから、余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{AB^2+BC^2-CA^2}{2\cdot AB\cdot BC} \\ \Leftrightarrow \cos B &= \frac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot 3\cdot 5} \\ \Leftrightarrow \cos B &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。 $0<B<\pi$ より $B=\frac{2}{3}\pi$ であるから、 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。外接円の半径 R は、正弦定理

より、

$$\begin{aligned}2R &= \frac{CA}{\sin B} \\ \Leftrightarrow R &= \frac{1}{2}\cdot \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ \Leftrightarrow R &= \frac{7\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

となる。

(10)

2次曲線 $y^2=2x^2+2x-1$ を変形すると、

$$\begin{aligned}y^2 &= 2x^2+2x-1 \\ \Leftrightarrow 2x^2+2x-y^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-y^2 &= \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}}-\frac{y^2}{2} &= 1\end{aligned}$$

となるから、双曲線であり、求める離心率は、

$$\begin{aligned}e &= \frac{\sqrt{\frac{3+\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}}}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \\ &= \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

である。

(11)

微分方程式を変形すると、

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}+y &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{y} &= -dx\end{aligned}$$

となるので、両辺で不定積分すると、 C 、 C' を積分定数として

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y} &= -\int dx \\ \Leftrightarrow \log y &= -x+C \\ \Leftrightarrow y &= e^C\cdot e^{-x} \\ \Leftrightarrow f(x) &= C'\cdot e^{-x}\end{aligned}$$

となる。 $f(1)=1$ を満たすとき、

$$\begin{aligned}C'\cdot e^{-1} &= 1 \\ \Leftrightarrow C' &= e\end{aligned}$$

であるから、

$$f(x)=e^{-x+1}$$

であり、 $f(0)=e$ となる。

(12)

微分方程式を変形すると

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{y} &= -\frac{dx}{x}\end{aligned}$$

となるので、両辺で不定積分すると、 C 、 C' を積分定数として

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y} &= -\int \frac{dx}{x} \\ \Leftrightarrow \log y &= -\log x+C \\ \Leftrightarrow y &= e^C\cdot x^{-1} \\ \Leftrightarrow f(x) &= C'\cdot x^{-1}\end{aligned}$$

となる。 $f(2)=1$ を満たすとき、

$$\begin{aligned}C'\cdot 2^{-1} &= 1 \\ \Leftrightarrow C' &= 2\end{aligned}$$

であるから、

$$f(x)=\frac{2}{x}$$

であり、 $f(3)=\frac{2}{3}$ となる。

1の m 乗根 z_k について偏角(≥ 0)の小さいものから順に $k=0, 1, \dots, m-1$ とする。複素数平面上の $w_0=1$ を基点 P_0 として、幾つかのルールに従って順に複素数平面上を $w_1, w_2, w_3, \dots$ と動かしていき、それらの示す点を $P_1, P_2, P_3, \dots$ で図形を描いていくという遊びを行う。

【ルール1】 $m=6$ の時、 n 回サイコロを振って、サイコロの目が $a(a=1, \dots, 6)$ である時、 $w_n = az_{a-1}w_{n-1}$ となる場合を考える。その時、 n 回目の試行が終わった時点で $|w_n|=15$ である確率は、 n を用いて表すと で表され、 n 回目の試行で点 w_{n-1} と w_n を結んだ線分 $P_{n-1}P_n$ が、はじめて虚軸と交わる確率は、 n を用いて表すと となる。また、 n 回目の試行で、点 w_{n-1} と w_n を結んだ線分 $P_{n-1}P_n$ の長さが $5\sqrt{31}$ となる確率は である。

【ルール2】 $m=8$ の時を考えるが、今度はサイコロを使わず順に $w_n = \sqrt{2}z_1w_{n-1} - 1$ と移る事にする。この時、 $w_n =$ で表され、 P_n から P_{n+4} までの連続する5点で結んだ不等辺五角形の面積は n を用いて となる。

【ルール3】 $m=20$ の時、コインを投げて表が出れば $a=3$ 、裏が出れば $a=1$ として、 $w_n = h_az_aw_{n-1}$ ($h_1=\sqrt{5}$, $h_3=\frac{1}{5}$)となる試行を行う。今、 n 回目で運よく原点周りをちょうど1周して再び基点 P_0 に戻ってきたとして、この多角形を T と呼ぶことにする。実数で $\sin \frac{\pi}{10} =$ と表現できる事を用いると、整数 $t(t=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ に対して原点周りに $\frac{\pi t}{2}$ だけ回転させても(重なって)同一な T のうち、最大面積となる T の面積は である。

【ルール4】 ある $m(m \geq 4)$ の場合を考える。コインを投げて表が出れば $a=2$ 、裏が出れば $a=1$ として、 n 回目の試行で $w_n = z_aw_{n-1}$ と進めていく時、原点周りをちょうど1周して再び基点 P_0 に戻る確率は、 m を用いて表すと となる。