

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ
$7 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10$	3

〔解説〕

1日＝24時間、1時間＝60分であり、心臓は1分間に5リットルの血液を送り出しているため、1日に送り出す総血液量は、

$$5 \cdot 60 \cdot 24 = 7.2 \cdot 10^3 \text{ (リットル)}$$

である。また、1リットル＝1000cm³であるため、

$$7.2 \cdot 10^3 \text{ リットル} = 7.2 \cdot 10^6 \text{ cm}^3$$

となる。よって、1日に送り出す総血液量は $7 \cdot 10^6 \text{ cm}^3$ である。

1リットル＝1000cm³、1デシリットル＝0.1リットルであるため、

$$2 \text{ デシリットル} = 0.2 \text{ リットル} = 2 \cdot 10^2 \text{ cm}^3$$

である。また、ある人の血液の密度は 1.060 g/cm^3 であるため、この人が献血した血液の重さは、

$$1.060 \cdot 2 \cdot 10^2 = 2.120 \cdot 10^2 \text{ (g)}$$

である。ここで、 $1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$ であるため、

$$2.120 \cdot 10^2 \text{ g} = 2.12 \cdot 10^{-1} \text{ kg}$$

となる。よって、この人が献血した血液の重さは $2 \cdot 10^{-1} \text{ kg}$ である。

1分＝60秒であり、生体組織500gに、3秒間に血液が0.05デシリットル流れ込んだため、組織血液量は、

$$0.05 \cdot \frac{100}{500} \cdot \frac{60}{3} = 2 \cdot 10^{-1} \text{ (デシリットル/(100g・分))}$$

である。また、1デシリットル＝0.1リットル、1ミリリットル＝ 10^{-3} リットルであるため、

$$2 \cdot 10^{-1} \text{ デシリットル} = 2 \cdot 10 \text{ ミリリットル}$$

となるため、組織血液量は $2 \cdot 10 \text{ ミリリットル/(100g・分)}$ である。

1ミリリットル＝ 10^{-3} リットル、1リットル＝1000cm³であるため、

$$20 \text{ ミリリットル} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ リットル} = 2 \cdot 10 \text{ cm}^3$$

となる。また、60滴で1cm³の輸液ができる滴下筒を用いるため、 $2 \cdot 10 \text{ cm}^3$ の輸液を行うには、

$$60 \cdot 2 \cdot 10 = 1.2 \cdot 10^3 \text{ (滴)}$$

必要である。ここで、1時間＝60分、1分＝60秒であるため、

$$1 \text{ 時間} = 3.6 \cdot 10^3 \text{ 秒}$$

となる。よって、1時間当たり20ミリリットルの輸液を行いたいとき、 $3.6 \cdot 10^3$ 秒間で $1.2 \cdot 10^3$ 滴、すなわち、

$$\frac{3.6 \cdot 10^3}{1.2 \cdot 10^3} = 3 \text{ (秒間)}$$

で1滴と指示すればよい。

【解答】

オ	カ	キ	ク	ケ	コ
$y=2x^2-x+5$	$(24,72)$	133	1	$\frac{10}{89}$	$5\sqrt{2}$
サ	シ	ス	セ	ソ	タ
-4	$\frac{5}{32}$	5	点B	$\frac{1}{3}AB$	-1

【解説】

a, b, c ($a \neq 0$) を実数とし、求める二次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とおく。このとき、この二次関数は 3 点 $(-1, 8), (1, 6), (3, 20)$ を通るため、

$$\begin{cases} 8 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \\ 6 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ 20 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 8 \\ a + b + c = 6 \\ 9a + 3b + c = 20 \end{cases} \\ \therefore (a, b, c) = (2, -1, 5)$$

となる。したがって、求める二次関数の式は $y = 2x^2 - x + 5$ である。

2 個の自然数 a, b ($a \leq b$) の和が 96 であるため、 $a + b = 96$ である。また、 a, b の最大公約数が 24 であるため、互いに素な自然数 p, q ($p < q$) を用いて、

$$a = 24p, b = 24q$$

と表せる。よって、

$$\begin{aligned} a + b &= 96 \\ \Leftrightarrow 24p + 24q &= 96 \\ \Leftrightarrow p + q &= 4 \\ \therefore (p, q) &= (1, 3) \quad (\because p < q) \end{aligned}$$

となるため、求める自然数 a, b のペアは $(a, b) = (24, 72)$ である。

$\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$ より、

$$\begin{aligned} \log_{10} 6^{170} &= 170(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) \\ &= 170 \cdot (0.3010 + 0.4771) \\ &= 132.277 \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} 132 < \log_{10} 6^{170} < 132.3010 &= 132 + \log_{10} 2 \\ \Leftrightarrow 10^{132} < 6^{170} < 2 \cdot 10^{132} \end{aligned}$$

となるため、 6^{170} を十進法で表したとき、桁数は 133、最高位の数字は 1 である。

m を自然数とする。分母が奇数で分子が自然数であるような数列

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \dots$$

の項のうち、分母が $2m - 1$ である m 個の項を第 m 群とする。このとき、第 m 群の第

k ($k = 1, 2, \dots, m$) 項は $\frac{k}{2m-1}$ と表すことができ、第 1 項から第 m 群の第 m 項までの項の総数は、

$$\sum_{k=1}^m k = \frac{1}{2} m(m+1) \text{ (個)}$$

となる。ここで、 $m = 44$ のとき、

$$\frac{1}{2} \cdot 44 \cdot (44 + 1) = 990$$

より、第 1000 項は、第 45 群の第 10 項である。すなわち、第 1000 項は

$$\frac{10}{2 \cdot 45 - 1} = \frac{10}{89}$$

である。

複素数平面上の 2 点、 $(-2 + 4i), (3 - i)$ の間の距離は、

$$\begin{aligned} |(-2 + 4i) - (3 - i)| &= |-5 + 5i| \\ &= 5|-1 + i| \\ &= 5\sqrt{(-1)^2 + 1^2} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

である。

二次曲線 $y = x^2 + 5x - 3$ と直線 $y = 2x + f$ が共有点をもつとき、 x についての二次方程式

$$\begin{aligned} x^2 + 5x - 3 &= 2x + f \\ \Leftrightarrow x^2 + 3x - (f + 3) &= 0 \end{aligned}$$

は実数解をもつ。よって、この二次方程式の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} D &= 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot \{-(f + 3)\} \\ &= 4f + 21 \end{aligned}$$

より、 f のとり得る値の範囲は、

$$\begin{aligned} D &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 4f + 21 &\geq 0 \\ \therefore f &\geq -\frac{21}{4} \end{aligned}$$

となる。このとき、二次方程式 $x^2 + 3x - (f + 3) = 0$ の実数解を $x = \alpha, \beta$ とすると、解と係数の関係より、

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= -3 \\ \alpha\beta &= -(f + 3) \end{aligned}$$

が成立する。また、二次曲線 $y = x^2 + 5x - 3$ と直線 $y = 2x + f$ との共有点の座標は $(\alpha, 2\alpha + f), (\beta, 2\beta + f)$ と表せるため、二次曲線 $y = x^2 + 5x - 3$ が直線 $y = 2x + f$ を切り取ってできる線分の長さが 5 であるとき、

$$\begin{aligned} \sqrt{\{(2\beta + f) - (2\alpha + f)\}^2 + (\beta - \alpha)^2} &= 5 \\ \Leftrightarrow \sqrt{5(\beta - \alpha)^2} &= 5 \\ \Leftrightarrow \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} &= \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow 9 - 4\{-(f + 3)\} &= 5 \\ \therefore f &= -4 \end{aligned}$$

となり、これはたしかに $f \geq -\frac{21}{4}$ を満たす。

硬貨を 2 回投げるとき、点 P が 2 回目に原点に戻る確率は、

$${}_2C_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

である。また、硬貨を 6 回投げるとき、点 P が 6 回目に原点に戻る確率は、

$${}_6C_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$$

である。よって、硬貨を 8 回投げるとき、点 P が 2 回目に原点に戻り、かつ 8 回目に原点に戻る確率は、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{16} = \frac{5}{32}$$

となる。

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 3x^2 - 6xy + 7y^2 + 12x - 14y + 12 \\ &= 7\left\{y - \left(\frac{3}{7}x + 1\right)\right\}^2 + \frac{12}{7}x^2 + 6x + 5 \\ &= 7\left\{y - \left(\frac{3}{7}x + 1\right)\right\}^2 + \frac{12}{7}\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 x の値を $x = x_0$ ($x_0 \geq 0$) 固定して $y \geq 0$ の範囲で最小値を考えると、

y の関数 $7\left\{y - \left(\frac{3}{7}x_0 + 1\right)\right\}^2 + \frac{12}{7}\left(x_0 + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}$ は、 $y = \frac{3}{7}x_0 + 1$ ($\because \frac{3}{7}x_0 + 1 > 0$) のとき、最小値

$\frac{12}{7}\left(x_0 + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}$ をとる。また、ここで x の固定を解除して $x \geq 0$ の範囲で最小値を考えると、

x の関数 $\frac{12}{7}\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}$ は、 $x = 0$ のとき、最小値 5 をとる。以上より、 x, y の関数 $f(x, y)$ は、

$x = 0, y = \frac{3}{7} \cdot 0 + 1 = 1$ のとき、最小値 5 をとる。

点 P について、 $2\overline{AB} \cdot \overline{AB} + 9\overline{AP} \cdot \overline{BP} = 3\overline{AB} \cdot (\overline{AP} + 2\overline{BP})$ が成り立つとき、

$$\begin{aligned} 2\overline{AB} \cdot \overline{AB} + 9\overline{AP} \cdot \overline{BP} &= 3\overline{AB} \cdot (\overline{AP} + 2\overline{BP}) \\ \Leftrightarrow 2\overline{AB} \cdot \overline{AB} + 9\overline{AP} \cdot (\overline{AP} - \overline{AB}) &= 3\overline{AB} \cdot \{\overline{AP} + 2(\overline{AP} - \overline{AB})\} \\ \Leftrightarrow 2\overline{AB} \cdot \overline{AB} + 9\overline{AP} \cdot \overline{AP} - 9\overline{AP} \cdot \overline{AB} &= 9\overline{AB} \cdot \overline{AP} - 6\overline{AB} \cdot \overline{AB} \\ \Leftrightarrow 9\overline{AP} \cdot \overline{AP} - 18\overline{AP} \cdot \overline{AB} + 8\overline{AB} \cdot \overline{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow |\overline{AP} - \overline{AB}|^2 &= \frac{1}{9}|\overline{AB}|^2 \\ \therefore |\overline{BP}| &= \frac{1}{3}|\overline{AB}| \end{aligned}$$

となるため、点 P が描く図形は、点 B を中心とする半径 $\frac{1}{3}AB$ の円になる。

$$\begin{aligned} z &= \frac{1 + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} + i} \\ &= \frac{(1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} \\ &= \frac{2\sqrt{3} + 2i}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\ &= \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

となるため、ド・モアブルの定理より、求める値は、

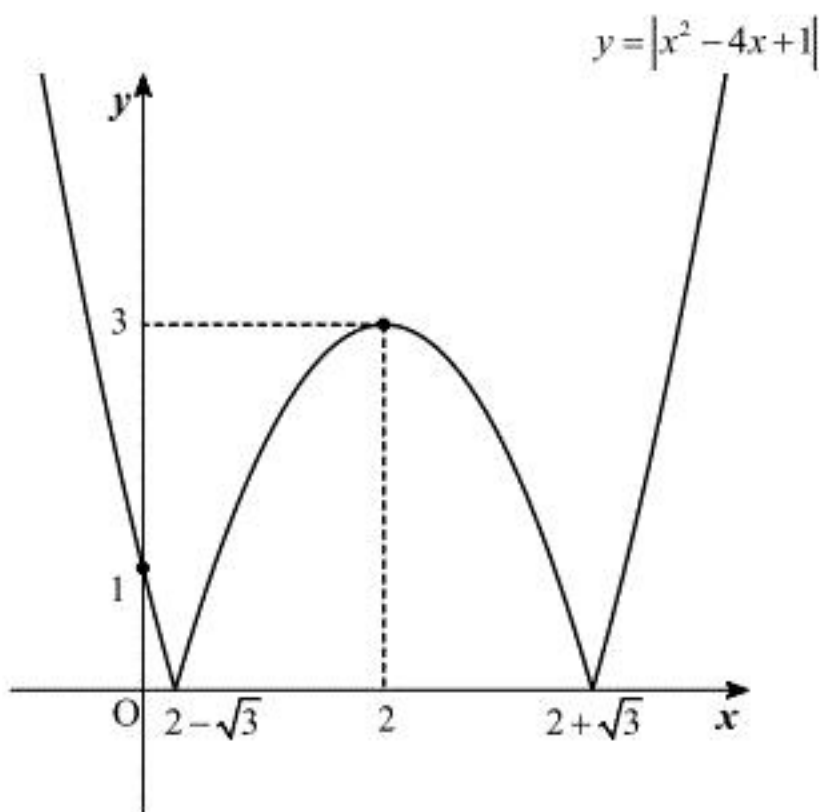
$$\begin{aligned} z^6 &= \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^6 \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{6} \cdot 6\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \cdot 6\right) \\ &= \cos \pi + i \sin \pi \\ &= -1 \end{aligned}$$

である。

(1)

$$\begin{aligned}
 y &= |x^2 - 4x + 1| \\
 &= |(x-2)^2 - 3| \\
 &= \begin{cases} (x-2)^2 - 3 & (x < 2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3} \leq x) \\ -(x-2)^2 + 3 & (2 - \sqrt{3} \leq x < 2 + \sqrt{3}) \end{cases}
 \end{aligned}$$

となるため、二次関数 $y = |x^2 - 4x + 1|$ のグラフは下図の通りである。



上図より、二次関数の頂点の座標は $(2, 3)$ である。

(答) $(2, 3)$

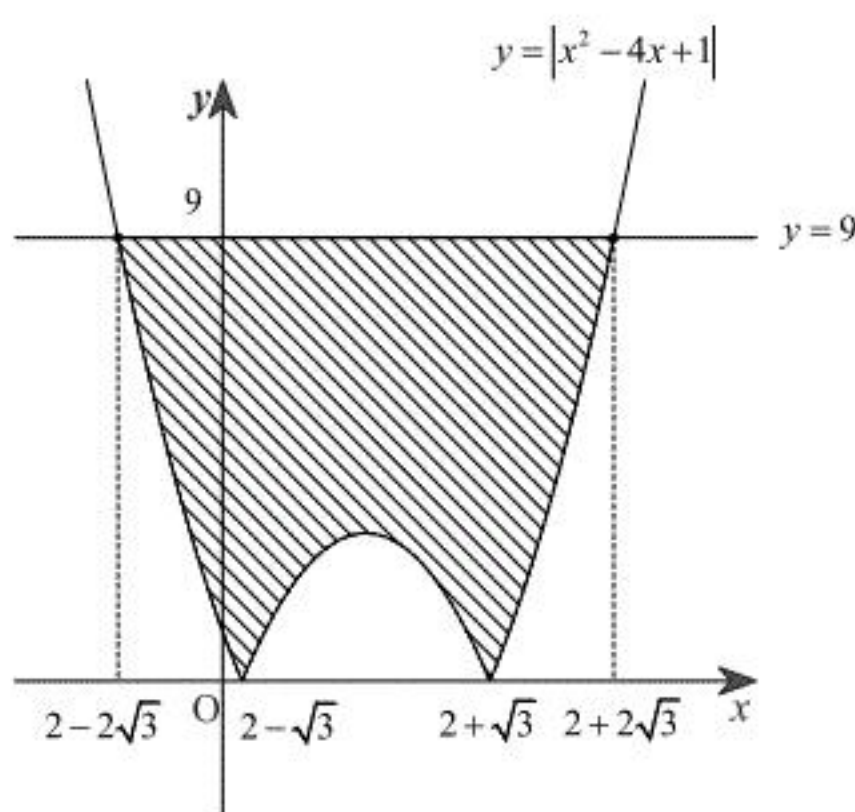
(2)

$3 < 9$ であるため、(1)より、直線 $y = 9$ は二次関数 $y = |x^2 - 4x + 1|$ と $x < 2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3} < x$ の範囲

に交点をそれぞれ1個ずつもつ。よって、二次関数 $y = |x^2 - 4x + 1|$ と直線 $y = 9$ の共有点の x 座標は、

$$\begin{aligned}
 x^2 - 4x + 1 &= 9 \\
 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 8 &= 0 \\
 \therefore x &= 2 \pm 2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

であるため、二次関数 $y = |x^2 - 4x + 1|$ と直線 $y = 9$ で囲まれる領域は下図の斜線部分である。



よって、上図より、面積 S は、

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{2-2\sqrt{3}}^{2+2\sqrt{3}} (9 - |x^2 - 4x + 1|) dx \\
 &= \int_{2-2\sqrt{3}}^{2+2\sqrt{3}} \{9 - (x^2 - 4x + 1)\} dx + 2 \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} (x^2 - 4x + 1) dx \\
 &= -\int_{2-2\sqrt{3}}^{2+2\sqrt{3}} \{x - (2 - 2\sqrt{3})\} \{x - (2 + 2\sqrt{3})\} dx + 2 \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \{x - (2 - \sqrt{3})\} \{x - (2 + \sqrt{3})\} dx \\
 &= \frac{1}{6} \cdot \{(2 + 2\sqrt{3}) - (2 - 2\sqrt{3})\}^3 - 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \{(2 + \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3})\}^3 \\
 &= 32\sqrt{3} - 8\sqrt{3} \\
 &= 24\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $S = 24\sqrt{3}$

(3)

(1)より、 f の定義域は $f \geq 0$ である。以下、 f の値によって場合分けをする。

[1] $3 \leq f$ のとき

S は f に関して明らかに単調増加する。

[2] $0 \leq f < 3$ のとき

このとき、 x についての二次方程式

$$\begin{aligned}
 x^2 - 4x + 1 &= f \\
 \Leftrightarrow x^2 - 4x - (f - 1) &= 0
 \end{aligned}$$

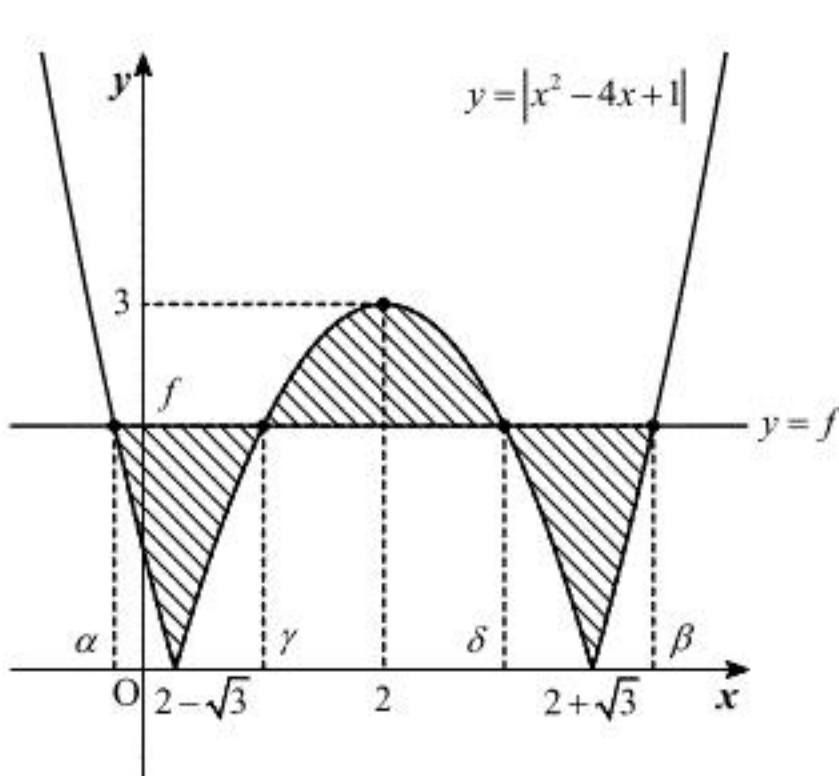
は異なる2実数解をもち、それらを α, β ($\alpha < \beta$) とおく。また、二次方程式

$$\begin{aligned}
 -(x^2 - 4x + 1) &= f \\
 \Leftrightarrow x^2 - 4x + f + 1 &= 0
 \end{aligned}$$

も異なる2実数解をもち、それらを γ, δ ($\gamma < \delta$) とおく。このとき、解と係数の関係より、

$$\begin{aligned}
 \alpha + \beta &= \gamma + \delta = 4 \\
 \alpha\beta &= -(f - 1) \\
 \gamma\delta &= f + 1
 \end{aligned}$$

が成り立つ。また、二次関数 $y = |x^2 - 4x + 1|$ と直線 $y = f$ で囲まれる領域は下図の斜線部分である。



上図より、面積 S は、

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{f - (x^2 - 4x + 1)\} dx + 2 \int_{\gamma}^{\delta} \{(-x^2 + 4x - 1) - f\} dx - 2 \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} (-x^2 + 4x - 1) dx \\
 &= -\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx - 2 \int_{\gamma}^{\delta} (x - \gamma)(x - \delta) dx + 2 \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \{x - (2 - \sqrt{3})\} \{x - (2 + \sqrt{3})\} dx \\
 &= \frac{1}{6} (\beta - \alpha)^3 + 2 \cdot \frac{1}{6} (\delta - \gamma)^3 - 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \{(2 + \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3})\}^3 \\
 &= \frac{1}{6} \{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} \{(\gamma + \delta)^2 - 4\gamma\delta\}^{\frac{3}{2}} - 8\sqrt{3} \\
 &= \frac{1}{6} \{4^2 + 4(f - 1)\}^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} \{4^2 - 4(f + 1)\}^{\frac{3}{2}} - 8\sqrt{3} \\
 &= \frac{4}{3} (f + 3)^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{3} (3 - f)^{\frac{3}{2}} - 8\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

と表せる。よって、

$$\begin{aligned}
 S' &= \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} (f + 3)^{\frac{3}{2}-1} + \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot (-1) \cdot (3 - f)^{\frac{3}{2}-1} \\
 &= 2\sqrt{f + 3} - 4\sqrt{3 - f} \\
 &= \frac{2(\sqrt{f + 3} - 2\sqrt{3 - f})(\sqrt{f + 3} + 2\sqrt{3 - f})}{\sqrt{f + 3} + 2\sqrt{3 - f}} \\
 &= \frac{2\{(f + 3) - 4(3 - f)\}}{\sqrt{f + 3} + 2\sqrt{3 - f}} \\
 &= \frac{10\left(f - \frac{9}{5}\right)}{\sqrt{f + 3} + 2\sqrt{3 - f}}
 \end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]より、 $0 \leq f$ における面積 S の増減は下表の通りである。

f	0	...	$\frac{9}{5}$	...	3	...
S'		-	0	+		+
S	$4\sqrt{3}$	$\searrow$	(極小値)	$\nearrow$	$8\sqrt{6} - 8\sqrt{3}$	$\nearrow$

上表より、面積 S が最小となるのは、 $f = \frac{9}{5}$ のときである。

(答) $f = \frac{9}{5}$

(1)

直線 l の傾きを m ($m > 0$) とおく。このとき、直線 l は点 $D(d, 0)$ を通るため、直線 l の方程式は、

$$y = m(x - d)$$

と表せる。また、直線 l は点 P において楕円 $x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1$ に接しているため、 x についての二次方程式

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{2} \cdot \{m(x-d)\}^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (m^2 + 2)x^2 - 2dm^2x + d^2m^2 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

は重解をもつ。よって、この二次方程式の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-dm^2)^2 - (m^2 + 2) \cdot (d^2m^2 - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\{(1 - d^2)m^2 + 2\} &= 0 \\ \Leftrightarrow m^2 &= \frac{2}{d^2 - 1} \\ \therefore m &= \sqrt{\frac{2}{d^2 - 1}} \quad (\because m > 0) \end{aligned}$$

となる。したがって、直線 l の方程式は、

$$y = \sqrt{\frac{2}{d^2 - 1}}(x - d)$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = \sqrt{\frac{2}{d^2 - 1}}(x - d)$$

(2)

直線 t は原点を通り、直線 l と同じ傾きをもつため、直線 t の方程式は、

$$y = \sqrt{\frac{2}{d^2 - 1}}x$$

である。よって、楕円 $x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1$ と直線 t の交点の座標は、

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{d^2 - 1}}x \right)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{d^2 - 1}{d^2} \\ \therefore x &= \pm \frac{\sqrt{d^2 - 1}}{|d|} \end{aligned}$$

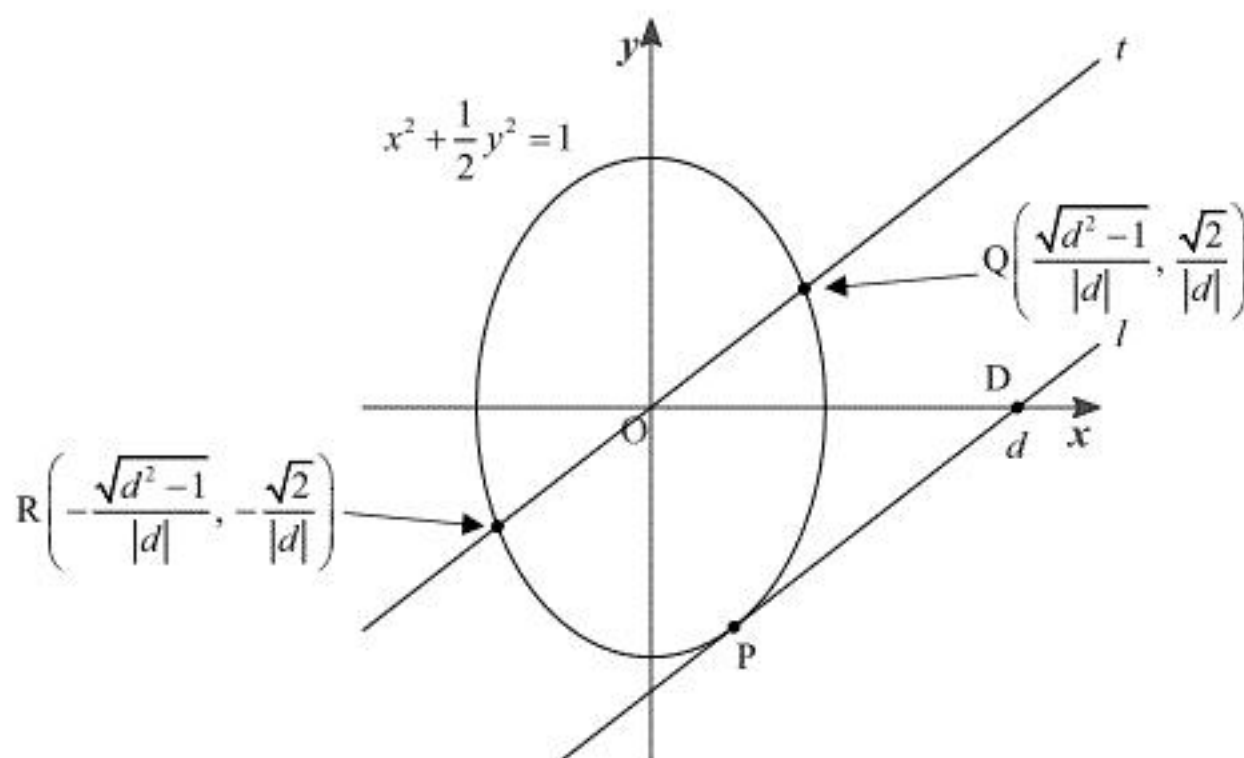
より、 $\left(\frac{\sqrt{d^2 - 1}}{|d|}, \frac{\sqrt{2}}{|d|} \right), \left(-\frac{\sqrt{d^2 - 1}}{|d|}, -\frac{\sqrt{2}}{|d|} \right)$ となる。よって、線分 QR の長さは、

$$\begin{aligned} \sqrt{\left\{ \frac{\sqrt{d^2 - 1}}{|d|} - \left(-\frac{\sqrt{d^2 - 1}}{|d|} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{\sqrt{2}}{|d|} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{|d|} \right) \right\}^2} &= 2 \sqrt{\left(\frac{\sqrt{d^2 - 1}}{|d|} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{|d|} \right)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{d^2 + 1}}{|d|} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{2\sqrt{d^2 + 1}}{|d|}$$

(3)



直線 l と直線 t は平行であるため、等積変形より、三角形 PQR と三角形 DQR の面積は等しい。また、点 D と直線 t との距離は、

$$\frac{\left| \sqrt{\frac{2}{d^2 - 1}} \cdot d - 0 \right|}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{2}{d^2 - 1}} \right)^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}|d|}{\sqrt{d^2 + 1}}$$

である。よって、(2)より、三角形 DQR の面積、すなわち、三角形 PQR の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{d^2 + 1}}{|d|} \cdot \frac{\sqrt{2}|d|}{\sqrt{d^2 + 1}} = \sqrt{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sqrt{2}$$