

1

(1)

方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数について、定数 c を変数分離することで考える。まず、 $x=0$ を解にもたないことは

$$\begin{aligned} f(0) &= a^5 \\ &> 0 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

より、確認できる。このとき、与えられた方程式は

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2+a)(x-a^2)^2 - cx^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(x^2+a)(x-a^2)^2}{x^2} &= c \quad (\because x \neq 0) \end{aligned}$$

と変形できるから、関数 $g(x)$ を $g(x) = \frac{(x^2+a)(x-a^2)^2}{x^2}$ とおき、曲線 $y=g(x)$ のグラフの概形を考えることにする。導関数 $g'(x)$ を計算すると

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\{2x(x-a^2)^2 + 2(x^2+a)(x-a^2)\}x^2 - 2(x^2+a)(x-a^2)^2x}{x^4} \\ &= \frac{2(x-a^2)\{(x-a^2)x^2 + (x^2+a)x - (x^2+a)(x-a^2)\}}{x^3} \\ &= \frac{2(x-a^2)(x^3+a^3)}{x^3} \end{aligned}$$

となり、極値、極限值について

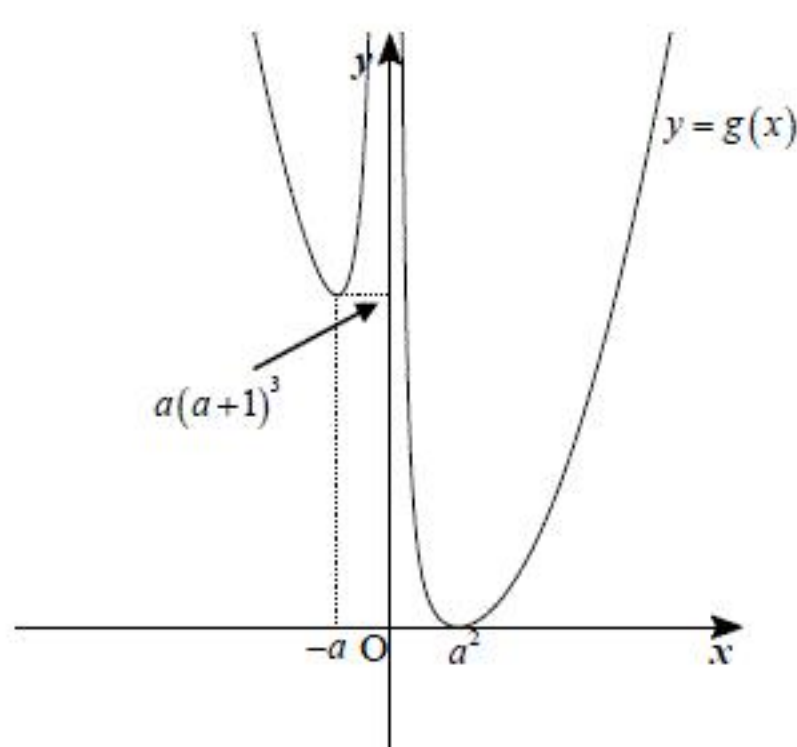
$$g(-a) = a(a+1)^3, \quad g(a^2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm 0} g(x) = +\infty$$

であるから、関数 $g(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$(-\infty)$	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	(0)		$\cdots$	a^2	$\cdots$	$(+\infty)$
$g'(x)$	$\diagdown$	$-$	0	$+$	$\diagup$		$-$	0	$+$	$\diagdown$
$g(x)$	$(+\infty)$	$\searrow$	$a(a+1)^3$	$\nearrow$	$(+\infty)$	$(+\infty)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$(+\infty)$

したがって、曲線 $y=g(x)$ のグラフの概形は以下のようになる。



上図より、方程式 $g(x)=c$ ($\Leftrightarrow f(x)=0$) の異なる実数解の個数は

$$\begin{cases} c < 0 \text{ のとき, } 0 \text{ 個} \\ c = 0 \text{ のとき, } 1 \text{ 個} \\ 0 < c < a(a+1)^3 \text{ のとき, } 2 \text{ 個} \\ c = a(a+1)^3 \text{ のとき, } 3 \text{ 個} \\ c > a(a+1)^3 \text{ のとき, } 4 \text{ 個} \end{cases}$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \begin{cases} c < 0 \text{ のとき, } 0 \text{ 個} \\ c = 0 \text{ のとき, } 1 \text{ 個} \\ 0 < c < a(a+1)^3 \text{ のとき, } 2 \text{ 個} \\ c = a(a+1)^3 \text{ のとき, } 3 \text{ 個} \\ c > a(a+1)^3 \text{ のとき, } 4 \text{ 個} \end{cases}$$

(2)

(1)の結果より、方程式 $f(x)=0$ が 3 個の実数解をもつのは、定数 c の値が

$$c = a(a+1)^3$$

のときであることがわかる。このとき、関数 $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+a)(x-a^2)^2 - a(a+1)^3x^2 \\ &= x^4 - 2a^2x^3 - 3a^2(a+1)x^2 - 2a^3x + a^5 \\ &= (x+a)^2 \{x^2 - 2a(a+1)x + a^3\} \end{aligned}$$

と変形できるから、4 次方程式 $f(x)=0$ の実数解は

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+a)^2 \{x^2 - 2a(a+1)x + a^3\} &= 0 \\ \therefore x &= -a, a(a+1) \pm a\sqrt{a^2+a+1} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad x = -a, a(a+1) \pm a\sqrt{a^2+a+1}$$

(3)

(2)で求めた実数解について、 $\alpha = a(a+1) - a\sqrt{a^2+a+1}$, $\beta = a(a+1) + a\sqrt{a^2+a+1}$ とおく。この

とき、大小関係

$$-a < \alpha < \beta$$

を満たすことを示す。これは、 $a > 0$ であることから

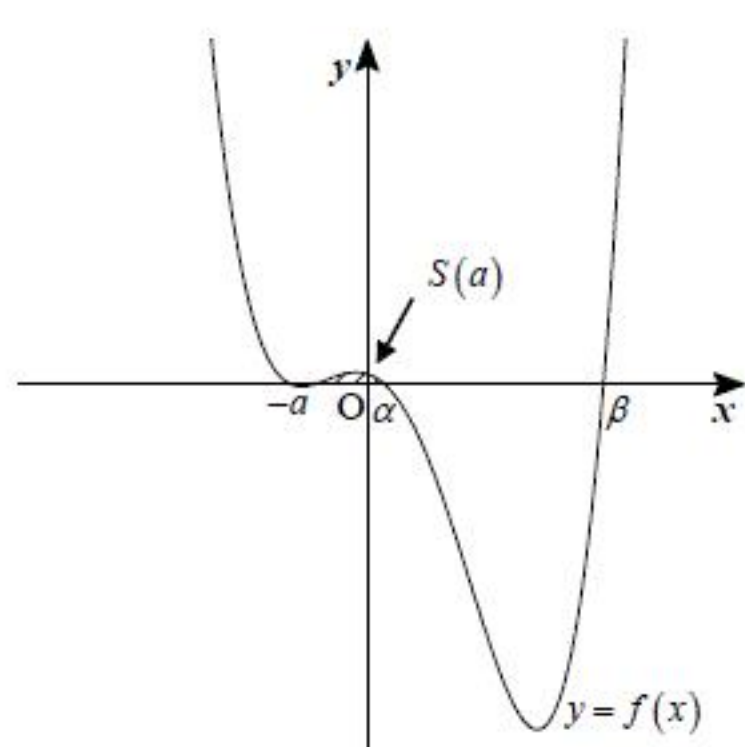
$$a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$$

$$a^2 + a + 1 < (a+1)^2 \Leftrightarrow -a\sqrt{a^2+a+1} > -a(a+1)$$

$$\Leftrightarrow \alpha > 0$$

$$-a\sqrt{a^2+a+1} < a\sqrt{a^2+a+1} \Leftrightarrow \alpha < \beta$$

となることで示せる。したがって、曲線 $y=f(x)$ の概形は下図のようになる。



よって、 $y=f(x)$ のグラフのうち $f(x) \geq 0$ の部分と x 軸で囲まれる図形の面積 $S(a)$ は

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{-a}^{\alpha} f(x) dx \\ &= \int_{-a}^{\alpha} (x+a)^2 (x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= \frac{1}{3} \left[(x+a)^3 (x-\alpha)(x-\beta) \right]_{-a}^{\alpha} - \frac{1}{3} \int_{-a}^{\alpha} (x+a)^3 \{2x - (\alpha+\beta)\} dx \\ &= 0 - \frac{1}{12} \left[(x+a)^4 \{2x - (\alpha+\beta)\} \right]_{-a}^{\alpha} + \frac{1}{12} \int_{-a}^{\alpha} (x+a)^4 \cdot 2 dx \\ &= -\frac{1}{12} (\alpha+a)^4 (\alpha-\beta) + \frac{1}{30} \left[(x+a)^5 \right]_{-a}^{\alpha} \\ &= \frac{1}{12} (\alpha+a)^4 (\beta-\alpha) + \frac{1}{30} (\alpha+a)^5 \\ &= \frac{1}{60} (\alpha+a)^4 \{5(\beta-\alpha) + 2(\alpha+a)\} \\ &= \frac{a^5}{30} \left(a+2-\sqrt{a^2+a+1} \right)^4 \left(a+2+4\sqrt{a^2+a+1} \right) \end{aligned}$$

と求まる。以上より、求める極限值は

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow +0} \frac{S(a)}{a^5} &= \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{30} \left(a+2-\sqrt{a^2+a+1} \right)^4 \left(a+2+4\sqrt{a^2+a+1} \right) \\ &= \frac{1}{30} \cdot (2-1)^4 \cdot (2+4) \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{a \rightarrow +0} \frac{S(a)}{a^5} = \frac{1}{5}$$

2

(1)

第 n 回目の試行で新たに加えられた玉が白玉であり、かつこの白玉が $n+1$ 回目の試行で取り出される事象について、第 n 回目の試行で取り出される玉の色で場合分けして考える。

[1] 第 n 回目の試行で白玉を取り出す場合

このとき、第 n 回目の試行で白玉が取り出される確率は p であり、さらにこのときこの

白玉が $n+1$ 回目の試行で取り出される確率は $\frac{1}{n+4}$ であるから、求める確率は

$$q_n \cdot p \cdot \frac{1}{n+4} = \frac{p}{n+4} q_n$$

である。

[2] 第 n 回目の試行で赤玉を取り出す場合

このとき、第 n 回目の試行で白玉が取り出される確率は $1-p$ であり、さらにこのときこ

の白玉が $n+1$ 回目の試行で取り出される確率は $\frac{1}{n+4}$ であるから、求める確率は

$$(1-q_n) \cdot (1-p) \cdot \frac{1}{n+4} = \frac{1-p}{n+4} (1-q_n)$$

である。

以上[1], [2]より、求める確率は

$$\frac{p}{n+4} q_n + \frac{1-p}{n+4} (1-q_n) = \frac{1}{n+4} \{(2p-1)q_n + (1-p)\}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{n+4} \{(2p-1)q_n + (1-p)\}$$

(2)

次のように事象を定める。

A : 「第 $n+1$ 回目の試行において n 回目に入れた玉を取り出さない」 事象

B : 「第 $n+1$ 回目に白玉を取り出す」 事象

ここで、事象 B の確率について

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) \\ &= P(A)P_A(B) + P(B \cap \bar{A}) \\ &= (1 - P(\bar{A}))P_A(B) + P(B \cap \bar{A}) \end{aligned}$$

と変形できるため、以下各確率 $P(B)$, $P(\bar{A})$, $P_A(B)$, $P(B \cap \bar{A})$ を n , p , q_n , q_{n+1} を用いて表すこ

とを考える。まず、問題文より確率 $P(B)$, $P_A(B)$ は

$$P(B) = q_{n+1}, \quad P_A(B) = q_n$$

であることがわかり、事象 $\bar{A}$, $B \cap \bar{A}$ は

$\bar{A}$: 「第 n 回目の試行において n 回目に入れた玉を取り出す」 事象

$B \cap \bar{A}$: 「第 $n+1$ 回目の試行において、 n 回目に入れた白玉を取り出す」 事象

となるから、(1)における考察と結果より

$$P(\bar{A}) = \frac{1}{n+4}, \quad P(B \cap \bar{A}) = \frac{1}{n+4} \{(2p-1)q_n + (1-p)\}$$

と表せることがわかる。以上より、 q_{n+1} は n , p , q_n を用いて

$$\begin{aligned} P(B) &= (1 - P(\bar{A}))P_A(B) + P(B \cap \bar{A}) \\ \Leftrightarrow q_{n+1} &= \left(1 - \frac{1}{n+4}\right)q_n + \frac{1}{n+4} \{(2p-1)q_n + (1-p)\} \\ \therefore q_{n+1} &= \frac{1}{n+4} \{(n+2p+2)q_n + (1-p)\} \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad q_{n+1} = \frac{1}{n+4} \{(n+2p+2)q_n + (1-p)\}$$

(3)

$r_n = q_n - \frac{1}{2}$ とおくとき、(2)で得られた等式について、 q_{n+1} , q_n を消去することで

$$\begin{aligned} r_{n+1} + \frac{1}{2} &= \frac{1}{n+4} \left\{ (n+2p+2) \left(r_n + \frac{1}{2} \right) + (1-p) \right\} \\ \Leftrightarrow r_{n+1} &= \frac{1}{n+4} \left\{ (n+2p+2)r_n + \frac{1}{2}n+2 \right\} - \frac{1}{2} \\ \therefore r_{n+1} &= \frac{n+2p+2}{n+4} r_n \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad r_{n+1} = \frac{n+2p+2}{n+4} r_n$$

(4)

まず r_1 の値を求める。1 個の白玉と 3 個の赤玉から白玉を取り出す事象の確率が q_1 であるこ
とから、これらの値は順に

$$q_1 = \frac{1}{4}, \quad r_1 = -\frac{1}{4}$$

であることがわかる。以下、 p が各値をとるときの q_n をそれぞれ求める。

[1] $p=0$ のとき

(3)の結果より

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \frac{n+2}{n+4} r_n \\ \Leftrightarrow (n+4)r_{n+1} &= (n+3)(n+2)r_n \\ \therefore (n+3)(n+2)r_n &= 4 \cdot 3 \cdot r_1 \end{aligned}$$

となるから、 r_n , q_n は順に

$$r_n = -\frac{3}{(n+3)(n+2)}, \quad q_n = \frac{1}{2} - \frac{3}{(n+3)(n+2)}$$

と求まる。

[2] $p=\frac{1}{2}$ のとき

(3)の結果より

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \frac{n+3}{n+4} r_n \\ \Leftrightarrow (n+4)r_{n+1} &= (n+3)r_n \\ \therefore (n+3)r_n &= 4 \cdot r_1 \end{aligned}$$

となるから、 r_n , q_n は順に

$$r_n = -\frac{1}{n+3}, \quad q_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}$$

と求まる。

[3] $p=1$ のとき

(3)の結果より

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= r_n \\ \therefore r_n &= r_1 \end{aligned}$$

となるから、 r_n , q_n は順に

$$r_n = -\frac{1}{4}, \quad q_n = \frac{1}{4}$$

と求まる。

以上[1], [2], [3]を整理すると、 q_n は

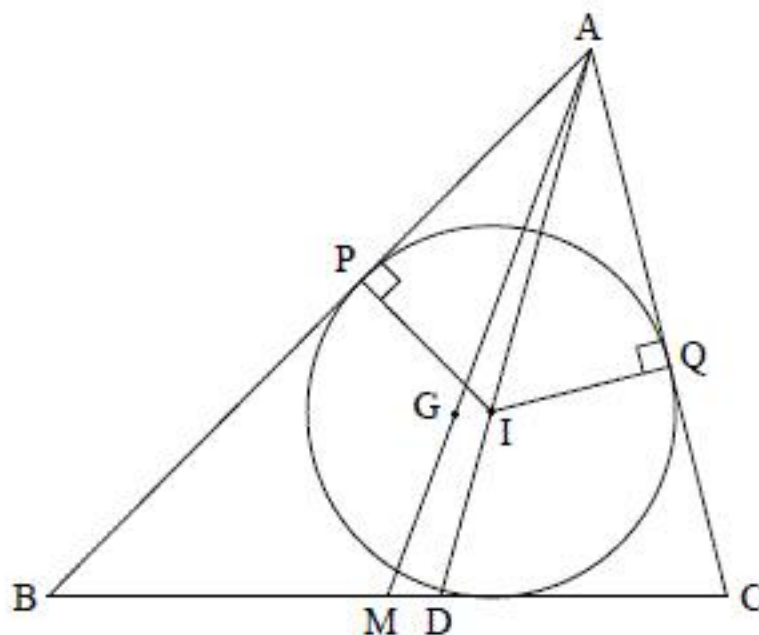
$$q_n = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{3}{(n+3)(n+2)} & (p=0) \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3} & \left(p=\frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{4} & (p=1) \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad q_n = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{3}{(n+3)(n+2)} & (p=0) \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3} & \left(p=\frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{4} & (p=1) \end{cases}$$

3

(1)



点Iは三角形ABCの内心であるから、線分ADは $\angle A$ の二等分線である。よって、

$$AB:AC=BD:DC$$

となるから、線分BDの長さは

$$BD=BC \cdot \frac{BD}{BD+DC}=BC \cdot \frac{AB}{AB+AC}=\frac{c}{b+c}a$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad BD=\frac{c}{b+c}a$$

(2)

線分BIは $\angle B$ の二等分線であるから、(1)と同様に考えることで

$$BA:BD=AI:ID$$

となる。よって、比AI:IDは

$$AI:ID=AB:BD$$

$$=c:\frac{c}{b+c}a$$

$$=b+c:a$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad AI:ID=b+c:a$$

(3)

三角形ABCの面積を S_0 とおき、三角形BGCの面積 S 、三角形BICの面積 T について S_0 を用いて表すことを考える。点Gは三角形ABCの重心であることから

$$AM:GM=3:1$$

となるため、面積 S は S_0 を用いて

$$S=\frac{GM}{AM} \cdot S_0=\frac{1}{3}S_0$$

と表せる。また、(2)の結果より、面積 T は S_0 を用いて

$$T=\frac{ID}{AD} \cdot S_0=\frac{ID}{AI+ID} \cdot S_0=\frac{a}{a+b+c}S_0=aS_0 \quad (\because a+b+c=1)$$

と表せるから、 $\frac{T}{S}$ の値は

$$\frac{T}{S}=\frac{aS_0}{\frac{1}{3}S_0}=3a$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad \frac{T}{S}=3a$$

(4)

3辺の長さ a, b, c が三角形を成すための条件は

$$\begin{cases} 0 < a < b+c \\ 0 < b < c+a \\ 0 < c < a+b \end{cases} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

であるが、 $a+b+c=1$ かつ $b < a < c$ を満たすとき、 $\textcircled{1}$ は

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1-a \\ 0 < b < 1-b \\ 0 < c < 1-c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 < a, b, c < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 < b < a < c < \frac{1}{2} \quad \text{かつ} \quad a+b+c=1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

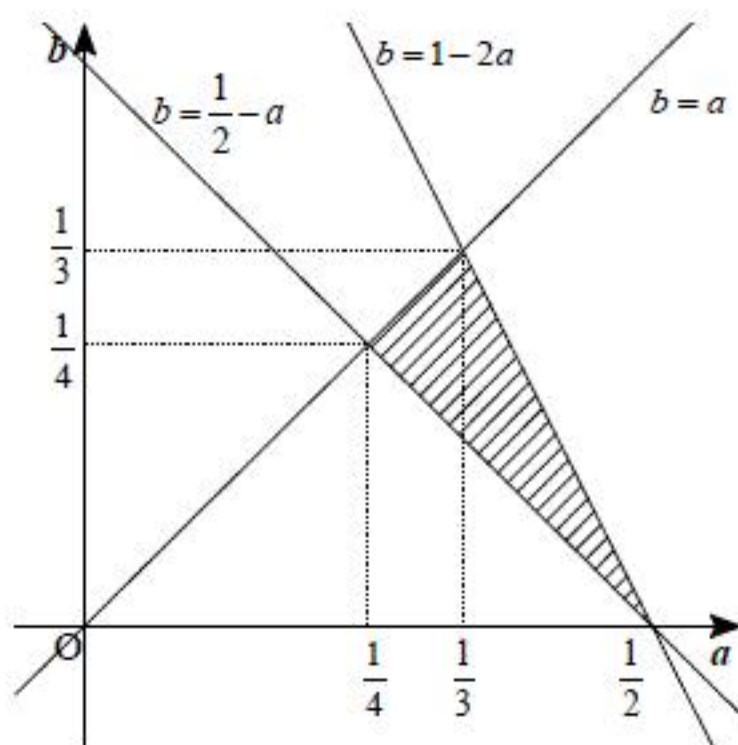
と同値変形できる。ここで、(3)の結果より $\frac{T}{S}=3a$ であることから、 $\textcircled{2}$ を満たす実数 b, c が存在するような実数 a の条件を求めればよいことがわかる。さらに、

$\textcircled{2}$ を満たす実数 b, c が存在する

$$\Leftrightarrow 0 < b < a < 1-a-b < \frac{1}{2} \text{を満たす実数} b \text{が存在する}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < b < a \\ \frac{1}{2}-a < b < 1-2a \end{cases} \text{を満たす実数} b \text{が存在する} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

と同値変形できるから、これを ab 平面上で考えることにする。



上図より、 $\textcircled{3}$ は

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$$

となることから、 $\frac{T}{S}(=3a)$ のとりうる値の範囲は

$$\frac{3}{4} < \frac{T}{S} < \frac{3}{2}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad \frac{3}{4} < \frac{T}{S} < \frac{3}{2}$$

4

(1) 以下、積分関数を C とする。

①

与えられた不定積分は、部分積分法より

$$\begin{aligned}\int t \sin t dt &= -t \cos t + \int \cos t dt \\ &= -t \cos t + \sin t + C\end{aligned}$$

と計算できる。

$$(\text{答}) \int t \sin t dt = -t \cos t + \sin t + C$$

②

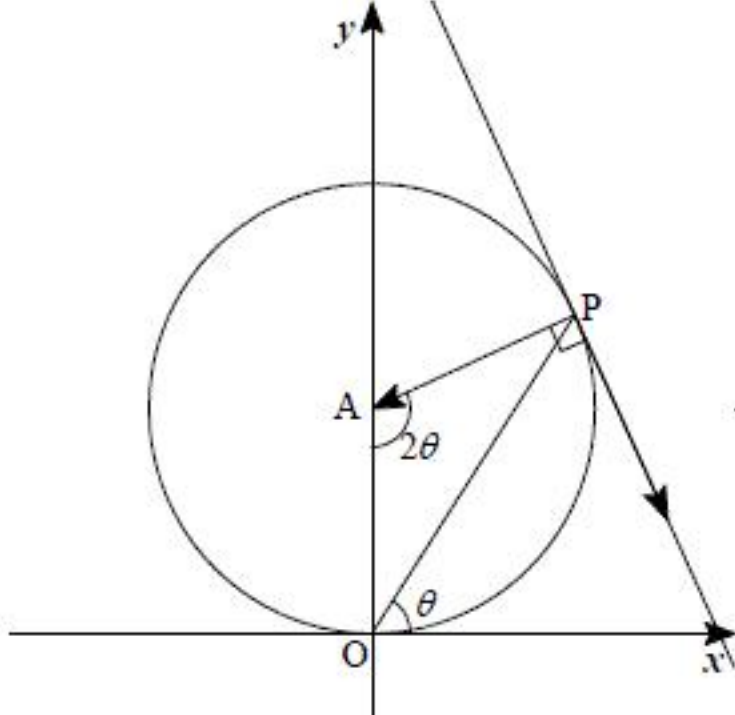
与えられた不定積分は、部分積分法と①の結果より

$$\begin{aligned}\int t^2 \cos t dt &= t^2 \sin t - 2 \int t \sin t dt \\ &= t^2 \sin t - 2(-t \cos t + \sin t) + C \\ &= (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t + C\end{aligned}$$

と計算できる。

$$(\text{答}) \int t^2 \cos t dt = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t + C$$

(2)



点 P の座標を求める。位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$ について

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

であり、接弦定理と円周角の定理より $\angle PAO = 2\theta$ であることから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \left(\cos \left(2\theta - \frac{\pi}{2} \right), \sin \left(2\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= (\sin 2\theta, -\cos 2\theta)\end{aligned}$$

と表せる。したがって、 $\overrightarrow{OP}$ は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (0, 1) + (\sin 2\theta, -\cos 2\theta) \\ &= (\sin 2\theta, 1 - \cos 2\theta)\end{aligned}$$

となるから、点 P の座標は $(\sin 2\theta, 1 - \cos 2\theta)$ であることがわかる。

$$(\text{答}) P(\sin 2\theta, 1 - \cos 2\theta)$$

(3)

点 Q の座標を求める。位置ベクトル $\overrightarrow{OQ}$ について

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$$

であり、単位ベクトル $\frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|}$ は $\overrightarrow{PA}$ を反時計回りに 90° 回転したものであるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA} &= \left(-\cos \left(2\theta - \frac{\pi}{2} \right), -\sin \left(2\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= \left(\cos \left\{ \left(2\theta - \frac{\pi}{2} \right) + \pi \right\}, \sin \left\{ \left(2\theta - \frac{\pi}{2} \right) + \pi \right\} \right) \\ &= \left(\cos \left(2\theta + \frac{\pi}{2} \right), \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} &= \left(\cos \left\{ \left(2\theta + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \right\}, \sin \left\{ \left(2\theta + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \right\} \right) \\ &= (\cos(2\theta + \pi), \sin(2\theta + \pi)) \\ &= (-\cos 2\theta, -\sin 2\theta)\end{aligned}$$

と表せる。したがって、 $\overrightarrow{OQ}$ は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OP} + |\overrightarrow{PQ}| \cdot \frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} \\ &= (\sin 2\theta, 1 - \cos 2\theta) + 2\theta(-\cos 2\theta, -\sin 2\theta) \\ &= (\sin 2\theta - 2\theta \cos 2\theta, 1 - \cos 2\theta - 2\theta \sin 2\theta)\end{aligned}$$

となるから、点 Q の座標は $(\sin 2\theta - 2\theta \cos 2\theta, 1 - \cos 2\theta - 2\theta \sin 2\theta)$ であることがわかる。

$$(\text{答}) Q(\sin 2\theta - 2\theta \cos 2\theta, 1 - \cos 2\theta - 2\theta \sin 2\theta)$$

(4)

(3)で求めた点 Q の座標について、関数 $f(\theta), g(\theta)$ を

$$\begin{cases} f(\theta) = \sin 2\theta - 2\theta \cos 2\theta \\ g(\theta) = 1 - \cos 2\theta - 2\theta \sin 2\theta \end{cases}$$

とおく。 θ が $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき、 $y_q = g(\theta)$ の最大値と最小値を求めればよい。導

関数 $f'(\theta), g'(\theta)$ を計算すると

$$\begin{cases} f'(\theta) = 2 \cos 2\theta - (2 \cos 2\theta - 4\theta \sin 2\theta) = 4\theta \sin 2\theta \\ g'(\theta) = 2 \sin 2\theta - (2 \sin 2\theta + 4\theta \cos 2\theta) = -4\theta \cos 2\theta \end{cases}$$

となるから、関数 $g(\theta)$ の増減表は以下のようになる。

θ	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$g'(\theta)$		-	0	+	
$g(\theta)$	$g(0)$	$\searrow$	$g\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\nearrow$	$g\left(\frac{\pi}{2}\right)$

ここで、関数 $g(\theta)$ に代入した値について

$$g(0) = 0, g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{2}, g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

となるから、 y_q は $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき最大値 2 、 $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき最小値 $1 - \frac{\pi}{2}$ をとることがわかる。

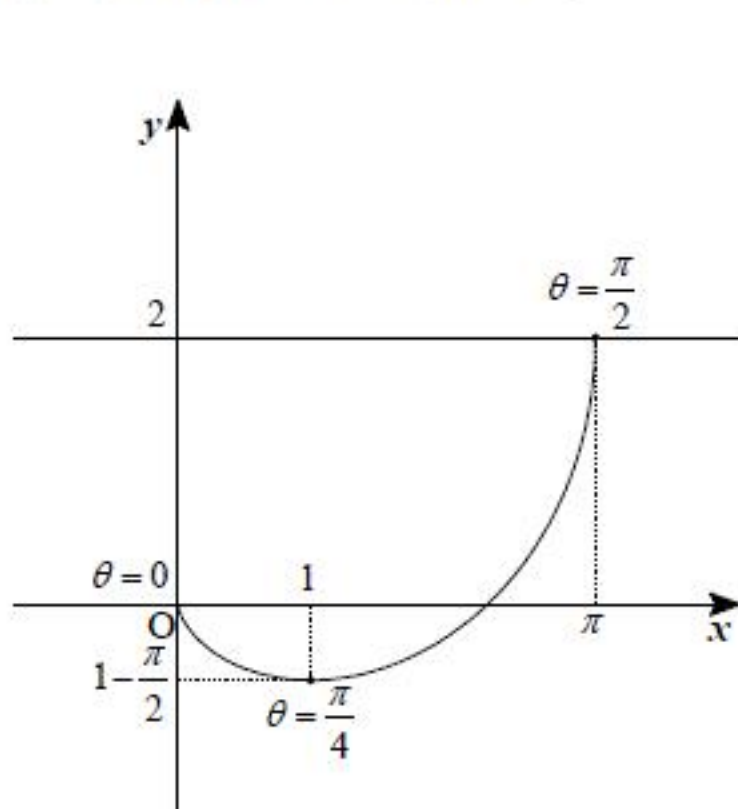
$$(\text{答}) \text{ 最大値: } 2 \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right), \text{ 最小値: } 1 - \frac{\pi}{2} \left(\theta = \frac{\pi}{4} \right)$$

(5)

(4)における考察より、点 Q の描く曲線の進行表は以下のようになる。

θ	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx_q}{d\theta}$		+		+	
$\frac{dy_q}{d\theta}$		-	0	+	
$\begin{pmatrix} x_q \\ y_q \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\searrow$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$	$\nearrow$	$\begin{pmatrix} \pi \\ 2 \end{pmatrix}$

よって、点 Q の描く曲線の概形は以下の図のようになる。



この曲線と y 軸および直線 $y = 2$ で囲まれる部分の面積を S とおくと

$$\begin{aligned}S &= \int_{x=0}^{x=\pi} (2 - y) dx \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \{ 2 - (1 - \cos 2\theta - 2\theta \sin 2\theta) \} 4\theta \sin 2\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4\theta \sin 2\theta + 2\theta \sin 4\theta + 8\theta^2 \cdot \frac{1 - \cos 4\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\theta \sin 2\theta \cdot 2d\theta + \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\theta \sin 4\theta \cdot 4d\theta + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2 d\theta - \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\theta)^2 \cos 4\theta \cdot 4d\theta\end{aligned}$$

と立式できる。ここで、各定積分の値を求めるために $2\theta = u, 4\theta = v$ とおくと、対応関係は

θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
u	0	$\rightarrow$	π
v	0	$\rightarrow$	2π

$$\frac{du}{d\theta} = 2, \frac{dv}{d\theta} = 4$$

となるから、(1)の結果を用いると、各定積分の値は

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\theta \sin 2\theta \cdot 2d\theta &= \int_0^{\pi} u \sin u du = [-u \cos u + \sin u]_0^{\pi} = \pi \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\theta \sin 4\theta \cdot 4d\theta &= \int_0^{2\pi} v \sin v dv = [-v \cos v + \sin v]_0^{2\pi} = -2\pi \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2 d\theta &= \left[\frac{\theta^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\theta)^2 \cos 4\theta \cdot 4d\theta &= \int_0^{2\pi} v^2 \cos v dv = [(v^2 - 2) \sin v + 2v \cos v]_0^{2\pi} = 4\pi\end{aligned}$$

と求まる。したがって、面積 S は

$$\begin{aligned}S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\theta \sin 2\theta \cdot 2d\theta + \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\theta \sin 4\theta \cdot 4d\theta + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2 d\theta - \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\theta)^2 \cos 4\theta \cdot 4d\theta \\ &= \pi + \frac{1}{8}(-2\pi) + 4 \cdot \frac{\pi^3}{24} - \frac{1}{16} \cdot 4\pi \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^3}{6}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^3}{6}$$