数 学 問 題 紙

平成 27 年 2 月 25 日

自　　11：00

至　　12：40

答 案 作 成 上 の 注 意

1. 数学の問題紙は 1 から 5 までの 5 ページである。
2. 解答用紙は ③ から ⑥ までの 4 枚である。
3. 解答はすべて解答用紙のおもてのみを用いて書くこと。
4. 問題紙と草案紙は持ち帰ること。

1 a と c は実数で $a > 0$ とする．また，関数 $f(x)$ を次式で定義する．

$$f(x) = (x^2 + a)(x - a^2)^2 - cx^2$$

(1) 方程式 $f(x) = 0$ の異なる実数解の個数を求めよ．

今後，方程式 $f(x) = 0$ が 3 個の異なる実数解を持つ場合のみを取り扱う．

(2) 方程式 $f(x) = 0$ の 3 個の異なる実数解を a を用いて表せ．

(3) $y = f(x)$ のグラフのうち $f(x) \geqq 0$ の部分と x 軸で囲まれる図形の面積を $S(a)$ とする．このとき $\displaystyle\lim_{a \to +0} \frac{S(a)}{a^5}$ を求めよ．

2 p を $0 \leqq p \leqq 1$ をみたす実数とする．1個の白玉と3個の赤玉が入っている袋があり，この袋から1個の玉を取り出して，取り出した玉に新たに白か赤の玉を1個加えて袋に戻す試行を行う．ただし，この試行の際に加えられる新たな玉の色は

・確率 p で取り出した玉と同じ色

・確率 $1-p$ で取り出した玉と異なる色

とする．

例えば，$p=1$ の場合，第1回目の試行において赤玉が取り出されると，取り出した赤玉に加えてもう一つ赤玉を袋に戻す．そして第1回目の試行が終わったときには，袋の中に1個の白玉と4個の赤玉が入っている．

第 n 回目の試行で白玉が取り出される確率を q_n とする．

(1) 第 n 回目の試行で新たに加えられた玉が白玉であり，かつこの白玉が $n+1$ 回目の試行で取り出される確率を n，p，q_n を用いて表せ．

(2) q_{n+1} を n，p，q_n を用いて表せ．ただし $n+1$ 回目の試行において，n 回目に入れた玉を取り出さないという条件の下で，$n+1$ 回目に白玉を取り出す条件つき確率が q_n と等しいことを用いてよい．

(3) $r_n = q_n - \dfrac{1}{2}$ とおくとき，r_{n+1} を n，p，r_n を用いて表せ．

(4) $p=0$，$p=\dfrac{1}{2}$，$p=1$ のときの q_n をそれぞれ n を用いて表せ．

3 三角形ABCの重心をG，内心をIとし，BC $= a$，CA $= b$，AB $= c$ とする．また直線AIが辺BCと交わる点をDとする．

(1) 線分BDの長さを a，b，c を用いて表せ．

(2) 比AI：IDを a，b，c を用いて表せ．

今後，$a + b + c = 1$ とし，三角形BGCの面積を S，三角形BICの面積を T とおく．

(3) $\dfrac{T}{S}$ を a を用いて表せ．

(4) $b < a < c$ とするとき，$\dfrac{T}{S}$ のとりうる値の範囲を求めよ．

4

(1) 次の不定積分を求めよ.

① $\displaystyle\int t \sin t \, dt$

② $\displaystyle\int t^2 \cos t \, dt$

座標平面の原点をOとする．点A(0，1)を中心とし半径1の円 C 上の $x \geqq 0$ の範囲にある点P $(x_p, \ y_p)$ に対して，線分OPと x 軸の正の部分とのなす角を $\theta\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．また，Pにおける C の接線上に点Q $(x_q, \ y_q)$ を次の条件をみたすようにとる.

・$y_q \leqq y_p$

・線分PQの長さは，C 上の弧OP(ただし弧全体が $x \geqq 0$ に存在する方)の長さに等しい

・Pの座標が(0，2)のときは $x_q = \pi$ となるようにQをとる

・PがOと一致する場合はQもOとし，$\theta = 0$ とする

(2) Pの座標を θ を用いて表せ.

(3) Qの座標を θ を用いて表せ.

(4) Pが $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，y_q の最大値と最小値を求めよ.

(5) Pが $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，Qの描く曲線と y 軸および直線 $y = 2$ で囲まれる部分の面積を求めよ.