

1

(1)

原点を O とおくと、 $\triangle OPA$ は $\angle AOP = 90^\circ$ の直角三角形であるから、三平方の定理より、

$$AP^2 = OA^2 + OP^2 = 1 + a^2$$

が成り立ち、対称性より、

$$BP^2 = AP^2 = 1 + a^2$$

を得る。 $AB = OA = 1$, $\angle APB = 45^\circ$ から、 $\triangle PAB$ において余弦定理より、

$$AB^2 = AP^2 + BP^2 - 2 \cdot AP \cdot BP \cdot \cos 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow 1^2 = 2(1 + a^2) - 2(1 + a^2) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 1 = (1 + a^2)(2 - \sqrt{2})$$

$$\Leftrightarrow 1 + a^2 = \frac{1}{2 - \sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore a = 2^{-\frac{1}{4}} \quad (\because a > 0)$$

と a の値が求められる。正六角形 $ABCDEF$ は一辺の長さが 1 の正三角形 6 つに分割できるから、求める体積を V とおくと、

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left\{ 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ \right) \right\} \cdot a$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2^{-\frac{1}{4}}$$

$$= 2^{-\frac{5}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$$

と計算できる。

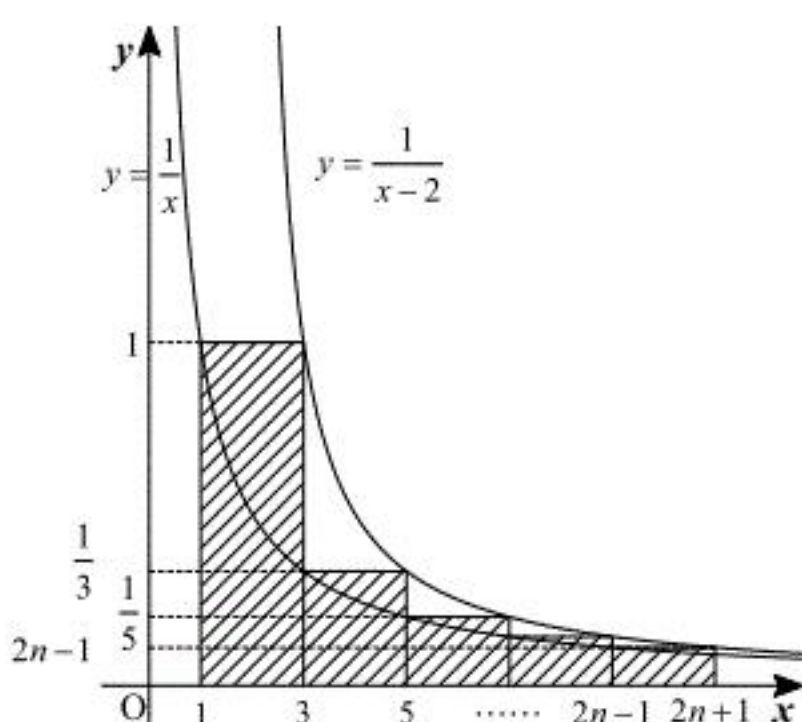
$$(\text{答}) \quad a = 2^{-\frac{1}{4}}, \text{体積} : 2^{-\frac{5}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$$

(2)(i)

題意より、

$$a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$

と表せる。ここで、下図のような xy 平面上の複数の長方形を考える。



斜線部の面積の和は、

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{5} + \cdots + 2 \cdot \frac{1}{2n-1} = 2a_n$$

と表せる。よって上図より、

$$\int_1^{2n+1} \frac{1}{x} dx < 2a_n$$

が成り立つ。

(証明終)

(ii)

上図より、

$$\int_1^{2n+1} \frac{1}{x} dx < 2a_n < 2 + \int_3^{2n+1} \frac{1}{x-2} dx$$

が成り立つ。これを計算すると、

$$\int_1^{2n+1} \frac{1}{x} dx < 2a_n < 2 + \int_3^{2n+1} \frac{1}{x-2} dx$$

$$\Leftrightarrow [\log |x|]_1^{2n+1} < 2a_n < [\log |x-2|]_3^{2n+1} + 2$$

$$\Leftrightarrow \log(2n+1) < 2a_n < \log(2n-1) + 2$$

となる。 n を限りなく大きくするから、 $\log n > 0$ と考えてよく、

$$\log(2n+1) < 2a_n < \log(2n-1) + 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log n + \log\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{2 \log n} < \frac{a_n}{\log n} < \frac{\log n + \log\left(2 - \frac{1}{n}\right)}{2 \log n} + \frac{1}{\log n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{\log\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{2 \log n} < \frac{a_n}{\log n} < \frac{1}{2} + \frac{\log\left(2 - \frac{1}{n}\right)}{2 \log n} + \frac{1}{\log n}$$

と変形できる。 $n \rightarrow \infty$ とすると $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{\log n}$ は 0 に近づくから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\log\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{2 \log n} \right\} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\log\left(2 - \frac{1}{n}\right)}{2 \log n} + \frac{1}{\log n} \right\} = \frac{1}{2}$$

となる。よってはさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\log n} = \frac{1}{2}$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\log n} = \frac{1}{2}$$

(3)

$123_{(5)}$ と $24_{(5)}$ を 10 進法で表すと、

$$123_{(5)} = 1 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 38_{(10)}$$

$$24_{(5)} = 2 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 14_{(10)}$$

となる。 $38 \cdot 14 = 532_{(10)}$ より、この数を 5 進法に変換すると、

$$\begin{aligned} 532_{(10)} &= 4 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 \\ &= 4112_{(5)} \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad 4112_{(5)}$$

2

(1)

題意より、

$$z_n = (1+ti)^{n-1} \alpha$$

と表すことができる。ここで、原点と点 $\beta = 1+ti$ を結ぶ直線が実軸から反時計回り方向になす角を θ とおくと、

$$|1+ti| = (1+t^2)^{\frac{1}{2}}$$

より、

$$z_n = (1+t^2)^{\frac{n-1}{2}} \{ \cos(n-1)\theta + i \sin(n-1)\theta \} \alpha \quad (\because \text{ド・モアブルの公式})$$

となる。これより、

$$|OP_n| = |z_n| = (1+t^2)^{\frac{n-1}{2}} |\alpha|$$

$$\angle P_n OP_{n+1} = n\theta - (n-1)\theta = \theta$$

であるから、 $\triangle OP_n P_{n+1}$ の面積は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot |OP_n| \cdot |OP_{n+1}| \cdot \sin \angle P_n OP_{n+1} &= \frac{1}{2} \cdot (1+t^2)^{\frac{n-1}{2}} |\alpha| \cdot (1+t^2)^{\frac{n}{2}} |\alpha| \cdot \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} (1+t^2)^{n-\frac{1}{2}} |\alpha|^2 \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ &= \frac{1}{2} t (1+t^2)^{n-1} |\alpha|^2 \end{aligned}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} t (1+t^2)^{n-1} |\alpha|^2$$

(2)

$\alpha = -1 + \sqrt{3}i$, $t = \tan \frac{5}{12}\pi$ のとき、これらの絶対値が π 以下となる偏角はそれぞれ $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{12}\pi$ で

ある。従って、原点と点 z_n を結ぶ直線が実軸から反時計回り方向になす角 φ_n ($0 \leq \varphi_n < 2\pi$) は、非負整数 l を用いて、

$$\varphi_n = \frac{5(n-1)}{12}\pi + \frac{2}{3}\pi - 2\pi l$$

と与えられる。 z_n が正の実数となるとき、

$$\begin{aligned} \varphi_n &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{5(n-1)}{12}\pi + \frac{2}{3}\pi - 2\pi l &= 0 \\ \therefore 5n &= 24l - 3 \end{aligned}$$

が成り立つので、これを満たす最も小さい n 、すなわち m_1 は、 $l=2$ のときに、

$$\begin{aligned} 5m_1 &= 24 \cdot 2 - 3 \\ \therefore m_1 &= 9 \end{aligned}$$

である。このとき、

$$\begin{aligned} z_9 &= \left(1 + \tan^2 \frac{5}{12}\pi \right)^{\frac{9-1}{2}} \left\{ \cos \left(8 \cdot \frac{5}{12}\pi \right) + i \sin \left(8 \cdot \frac{5}{12}\pi \right) \right\} (-1 + \sqrt{3}i) \\ &= 2 \left(1 + \tan^2 \frac{5}{12}\pi \right)^4 \\ &= \frac{2}{\cos^8 \frac{5}{12}\pi} \left(\because 1 + \tan^2 \frac{5}{12}\pi = \frac{1}{\cos^2 \frac{5}{12}\pi} \right) \end{aligned}$$

であるが、

$$\cos^2 \frac{5}{12}\pi = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \left(2 \cdot \frac{5}{12}\pi \right) \right\} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

より、

$$z_9 = \frac{2}{\cos^8 \frac{5}{12}\pi} = \frac{2}{\left(\cos^2 \frac{5}{12}\pi \right)^4} = 2 \left(\frac{4}{2-\sqrt{3}} \right)^4 = 512 (2+\sqrt{3})^4$$

を得る。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} &< \sqrt{3} < 2 \\ \Leftrightarrow \frac{7}{2} &< 2 + \sqrt{3} < 4 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{7}{2} \right)^4 &< (2 + \sqrt{3})^4 < 4^4 \\ \Leftrightarrow 512 \cdot \left(\frac{7}{2} \right)^4 &< 512 (2 + \sqrt{3})^4 < 512 \cdot 4^4 \\ \therefore 76832 &< z_9 < 131072 \end{aligned}$$

より、 $|z_{m_1} - 10^6|$ の値が最少となる自然数 p は、

$$p = 5$$

と分かる。

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

(3)

(2)の結果より、

$$5n = 24l - 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たす n が小さい順に $m_1, m_2, m_3, \dots$ である。 $\textcircled{1}$ の左辺は5の倍数であるから、 $24l-3$ が5の倍数となる条件を考える。以下 mod 5 とすると、

$$\begin{aligned} l \equiv 0 \text{ のとき、} & 24l - 3 \equiv -3 \equiv 2 \\ l \equiv 1 \text{ のとき、} & 24l - 3 \equiv 21 \equiv 1 \\ l \equiv 2 \text{ のとき、} & 24l - 3 \equiv 45 \equiv 0 \\ l \equiv 3 \text{ のとき、} & 24l - 3 \equiv 69 \equiv 4 \\ l \equiv 4 \text{ のとき、} & 24l - 3 \equiv 93 \equiv 3 \end{aligned}$$

であるから、 $l \equiv 2 \pmod{5}$ であることは $\textcircled{1}$ を満たすような自然数 n が存在することの必要十分条件である。従って、 $\textcircled{1}$ において $l = 5k - 3$ ($k = 1, 2, \dots$) とすることで、 $\{m_k\}$ の一般項は、

$$\begin{aligned} 5m_k &= 24(5k - 3) - 3 \\ \therefore m_k &= 24k - 15 \end{aligned}$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad m_k = 24k - 15$$

(1)

1回目の試行の結果てんびんが釣り合わないためには、1g または 2g のおもりが選ばれればよい。よって求める確率は、

$$p_1 = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$$

と表せる。また、1回目の試行の結果てんびんが釣り合っていないとき、左右のおもりの総重量の差は1g または 2g である。従って、1回目の試行の結果てんびんが釣り合っていないときに2回目の試行後もてんびんが釣り合わない確率は、左右のおもりの総重量の差と等しいおもりが選ばれない確率であるから、

$$p_2 = p_1 \cdot \left(\frac{a}{2} + 1 - a \right) = a \left(1 - \frac{a}{2} \right)$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad p_1 = a, p_2 = a \left(1 - \frac{a}{2} \right)$$

(2)

(1)と同様に、 n 回目の試行の結果てんびんが釣り合っていないとき、左右のおもりの総重量の差は1g または 2g である。従って、 n 回目の試行の結果てんびんが釣り合っていないときに $n+1$ 回目の試行後もてんびんが釣り合わない確率は、左右のおもりの総重量の差と等しいおもりが選ばれない確率であるから、

$$p_{n+1} = p_n \cdot \left(\frac{a}{2} + 1 - a \right) = \left(1 - \frac{a}{2} \right) p_n$$

である。 $p_1 = a$ であるから、

$$p_n = a \left(1 - \frac{a}{2} \right)^{n-1}$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad p_n = a \left(1 - \frac{a}{2} \right)^{n-1} \quad (n \geq 1)$$

(3)

1回目の試行の結果てんびんが釣り合うということは、1回目の試行で3g のおもりを選ぶということであるから、

$$q_1 = 1 - a$$

である。次に、 $n > 1$ として、 $n-1$ 回目の試行の結果てんびんが釣り合わず、かつ n 回目の試行の結果てんびんが釣り合う場合を考える。 $n-1$ 回目の試行の結果てんびんが釣り合わない確率は p_{n-1} であり、このとき左右のおもりの総重量の差は1g または 2g であるから、 n 回目の試行の結果てんびんが釣り合う確率は、

$$q_n = p_{n-1} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{a}{2} \right)^{n-2}$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad q_n = 1 - a \quad (n = 1)$$

$$q_n = \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{a}{2} \right)^{n-2} \quad (n \geq 2)$$

(4)

$$r = 1 - \frac{a}{2} \left(\frac{1}{2} < r < 1 \right)$$

$$S_m = \sum_{n=1}^m nq_n$$

とおく。(3)の結果より、

$$S_m = (1-a) + \frac{a^2}{2} \{ 2r^0 + 3r^1 + \cdots + mr^{m-2} \} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$rS_m = (1-a)r + \frac{a^2}{2} \{ 2r^1 + 3r^2 + \cdots + mr^{m-1} \} \quad \cdots \textcircled{2}$$

と表すことができる。①と②の差をとることで、 S_m は、

$$(1-r)S_m = (1-a)(1-r) + \frac{a^2}{2} \{ r^0 + r^0 + r^1 + \cdots + r^{m-2} - mr^{m-1} \}$$

$$\Leftrightarrow (1-r)S_m = (1-a)(1-r) + \frac{a^2}{2} r^0 + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1-r^{m-1}}{1-r} - \frac{a^2 m}{2} r^{m-1}$$

$$\Leftrightarrow S_m = (1-a) + a + 2(1-r^{m-1}) - amr^{m-1} \left(\because 1-r = \frac{a}{2} \neq 0 \right)$$

$$\therefore S_m = 3 - (2+am)r^{m-1}$$

と表せる。ここで、 $\frac{1}{2} < r < 1$ より、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} nq_n &= \lim_{m \rightarrow \infty} S_m \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \{ 3 - (2+am)r^{m-1} \} \\ &= 3 \left(\because \lim_{m \rightarrow \infty} mr^{m-1} = 0 \right) \end{aligned}$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} nq_n = 3$$

4

(1)

$\int_1^e tf(t)dt$ は定数であるからこれを A とおくことで、

$$f(x) = 2\log x - A$$

と表すことができる。これより、

$$\begin{aligned} A &= \int_1^e tf(t)dt \\ &= \int_1^e t(2\log t - A)dt \\ &= \left[\left[t^2 \log t \right]_1^e - \int_1^e t dt \right] - \left[\frac{A}{2} t^2 \right]_1^e \\ &= e^2 - \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^e - \frac{A}{2}(e^2 - 1) \\ &= \frac{1-e^2}{2}A + \frac{e^2+1}{2} \\ \therefore A &= 1 \end{aligned}$$

と A の値を求めることができるので、

$$f(x) = 2\log x - 1$$

となる。

(答) $f(x) = 2\log x - 1$

(2)

$f(x) = 2\log x - 1$ を x で微分すると、

$$f'(x) = \frac{2}{x}$$

となる。よって接点 (u, v) における接線の方程式は、 $y = \frac{2}{u}(x-u) + v$ と表せる。これが原点を通るから、

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2}{u}(0-u) + v \\ \Leftrightarrow v &= 2 \end{aligned}$$

と v の値が求められる。接点 (u, v) は $y = 2\log x - 1$ 上の点より、

$$\begin{aligned} 2 &= 2\log u - 1 \\ \Leftrightarrow \log u &= \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow u &= e^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

と u の値が求められる。よって求める接点は、

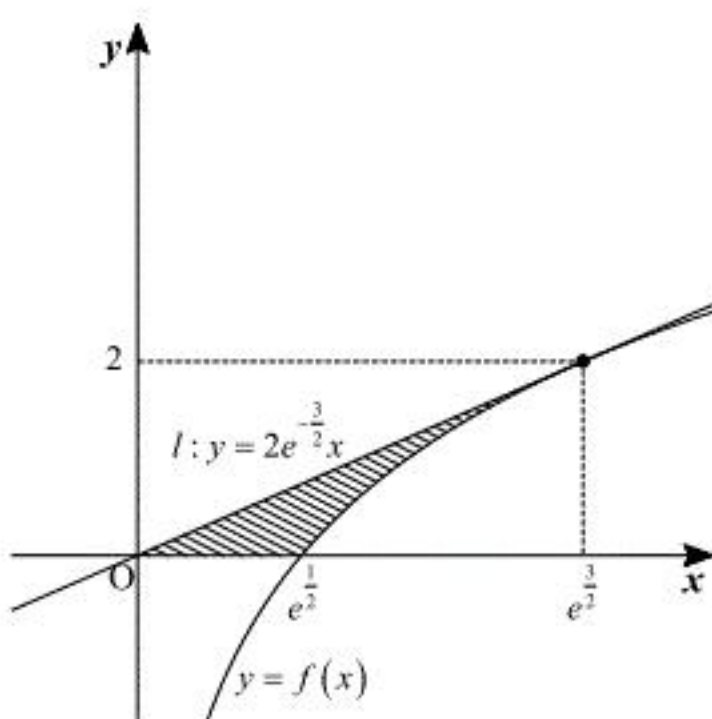
$$(u, v) = \left(e^{\frac{3}{2}}, 2 \right)$$

と分かる。

(答) $(u, v) = \left(e^{\frac{3}{2}}, 2 \right)$

(3)

題意の立体は、下図の斜線部の領域を x 軸のまわりに1回転してできる立体である。



題意の体積を V とくと、 V は底面の半径が 2 、高さが $e^{\frac{3}{2}}$ の円錐の体積から、曲線

$y = 2\log x - 1$ 、 x 軸、直線 $x = e^{\frac{3}{2}}$ で囲まれる領域を x 軸の周りに1回転してできる立体の体積を引くことで求められる。従って、

$$V = \frac{1}{3} \cdot (\pi \cdot 2^2) \cdot e^{\frac{3}{2}} - \pi \int_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^{\frac{3}{2}}} (2\log x - 1)^2 dx = \frac{4}{3} e^{\frac{3}{2}} \pi - \pi \int_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^{\frac{3}{2}}} (2\log x - 1)^2 dx$$

である。ここで、不定積分 $\int (2\log x - 1)^2 dx$ は、 C を積分定数とすると、

$$\begin{aligned} \int (2\log x - 1)^2 dx &= x(2\log x - 1)^2 - \int x \cdot (2\log x - 1)' \cdot 2(2\log x - 1) dx + C \\ &= x(2\log x - 1)^2 - 4 \int (2\log x - 1) dx + C \\ &= x(2\log x - 1)^2 - 4 \{ 2(x\log x - x) - x \} + C \\ &= x(2\log x - 1)^2 - 8x\log x + 12x + C \\ &= 4x(\log x)^2 - 12x\log x + 13x + C \end{aligned}$$

と求めることができるので、

$$\begin{aligned} \int_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^{\frac{3}{2}}} (2\log x - 1)^2 dx &= \left[4x(\log x)^2 - 12x\log x + 13x \right]_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^{\frac{3}{2}}} \\ &= 4e^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^2 - 12e^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{2} + 13e^{\frac{3}{2}} - 4e^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 12e^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} - 13e^{\frac{1}{2}} \\ &= 4e^{\frac{3}{2}} - 8e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

が成り立つ。従って、求める体積は、

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3} e^{\frac{3}{2}} \pi - \pi \int_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^{\frac{3}{2}}} (2\log x - 1)^2 dx \\ &= \frac{4}{3} e^{\frac{3}{2}} \pi - \left(4e^{\frac{3}{2}} - 8e^{\frac{1}{2}} \right) \pi \\ &= \frac{8}{3} \sqrt{e}(3-e)\pi \end{aligned}$$

と計算できる。

(答) $\frac{8}{3} \sqrt{e}(3-e)\pi$