

数 学 問 題 紙

平成 29 年 2 月 25 日

自 11 : 00

至 12 : 40

答 案 作 成 上 の 注 意

1. 数学の問題紙は 1 から 5 までの 5 ページである。
2. 解答用紙は ③ から ⑥ までの 4 枚である。
3. 解答はすべて解答用紙のおもてのみを用いて書くこと。
4. 問題紙と草案紙は持ち帰ること。

1

次の各問に答えよ.

- (1) 座標空間において, xy 平面上に原点を中心とする半径 1 の円に内接する正六角形 ABCDEF がある. 六角錐 P-ABCDEF において, 頂点 P の座標を $P(0, 0, a)$ ($a > 0$) とする. $\angle APB = 45^\circ$ であるとき, a の値と, 六角錐 P-ABCDEF の体積をそれぞれ求めよ.

(2) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$ ($n = 1, 2, \dots$) とする.

(i) 不等式 $\int_1^{2n+1} \frac{1}{x} dx < 2a_n$ が成り立つことを示せ.

(ii) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\log n}$ を求めよ.

- (3) 5 進法で表された 2 つの数 $123_{(5)}$ と $24_{(5)}$ の積を 5 進法で表せ.

- 2 i を虚数単位とし、 α と β を複素数で $\alpha \neq 0$, $\beta = 1 + ti$ ($t > 0$) とする。このとき、数列 $\{z_n\}$ を次で定義する。

$$z_1 = \alpha,$$

$$z_{n+1} = \beta z_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

以下の各問に答えよ。

- (1) 複素数平面において原点を O とし、 z_n を表す点を P_n とする。三角形 $OP_n P_{n+1}$ の面積を α , t , n を用いて表せ。

$\alpha = -1 + \sqrt{3}i$, $t = \tan \frac{5}{12}\pi$ とする。 z_n が正の実数となる番号 n を小さいほうから順に $m_1, m_2, m_3, \dots$ とする。

- (2) $n = m_1$ のとき z_n がどのくらいの大きさなのかを調べたい。 $n = m_1$ のとき $|z_n - 10^p|$ の値が最小となる自然数 p を求めよ。

- (3) 数列 $\{m_k\}$ の一般項を k を用いて表せ。

3

3 g のおもり 1 個が片方の皿にのっているてんびんと、無数に用意された 1 g, 2 g, 3 g のおもりがある. 以下の 2 つのルールに基づいて, てんびんの皿におもりを 1 個ずつのせる試行を行う.

1. てんびんがつり合っていないときには, 総重量が軽い方の皿に 1 g, 2 g, 3 g のおもりを無作為に 1 個選んでのせる. それぞれのおもりが選ばれる確率は $0 < a < 1$ として $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$, $1 - a$ である.
2. てんびんがつり合った時点で試行をやめる.

n 回目の試行の結果, てんびんがつり合っていない確率を p_n , てんびんがつり合って試行が終了する確率を q_n とするとき, 以下の各問に答えよ.

(1) p_1 と p_2 をそれぞれ a を用いて表せ.

(2) p_n の一般項を a と n を用いて表せ.

(3) q_n の一般項を a と n を用いて表せ.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} nq_n$ を求めよ.

4 $x > 0$ に対して，連続関数 $f(x)$ は，等式

$$f(x) = 2 \log x - \int_1^e t f(t) dt$$

をみたすものとする．また，曲線 $y = f(x)$ の接線のうち，原点を通るものを l とし接点を (u, v) とする．以下の各問に答えよ．

- (1) $f(x)$ を求めよ．
- (2) 接点 (u, v) を求めよ．
- (3) 曲線 $y = f(x)$ ，直線 l および x 軸で囲まれる領域を， x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

