

(1)

 $x+y^2=y+z^2=z+x^2$ が成り立つとき

$$x+y^2=y+z^2$$

$$\Leftrightarrow x-y=-(y+z)(y-z) \quad \cdots \textcircled{1}$$

であり、同様に

$$y+z^2=z+x^2$$

$$\Leftrightarrow y-z=-(z+x)(z-x) \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$z+x^2=x+y^2$$

$$\Leftrightarrow z-x=-(x+y)(x-y) \quad \cdots \textcircled{3}$$

が成り立つ。①②③の両辺を掛け合わせると、 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ であるから

$$(x-y)(y-z)(z-x) = -(y+z)(y-z)(z+x)(z-x)(x+y)(x-y)$$

$$\Leftrightarrow \{(x+y)(y+z)(z+x)+1\}(x-y)(y-z)(z-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=y \text{ または } y=z \text{ または } z=x$$

となる。さらに、

$$x=y \text{ のとき, } \textcircled{3} \text{ より } z=x$$

$$y=z \text{ のとき, } \textcircled{1} \text{ より } x=y$$

$$z=x \text{ のとき, } \textcircled{2} \text{ より } y=z$$

であるから、このとき、 $x=y=z$ である。

(証明終)

(2)

 D を 2 次方程式 $t^2+xt+|y|=0$ の判別式とすると、

$$y \in P(x)$$

$$\Leftrightarrow t^2+xt+|y|=0 \text{ をみたす実数 } t \text{ が存在する}$$

$$\Leftrightarrow D \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-4|y| \geq 0$$

$$\Leftrightarrow |y| \leq \frac{x^2}{4}$$

となる。ここで、両辺が非負であるから

$$y \in P(x) \Leftrightarrow y^2 \leq \frac{x^4}{16}$$

である。また、

$$y \in Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \text{すべての実数 } t \text{ に対して } xt^2+yt+1 > 0 \text{ が成り立つ}$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ かつ } D < 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ かつ } y^2-4x < 0$$

となり、 $y^2 \geq 0$ より $y^2-4x < 0$ ならば $x > 0$ であるから

$$y \in Q(x) \Leftrightarrow y^2 < 4x$$

である。よって、

$$P(x) \subset Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4}{16} < 4x$$

$$\Leftrightarrow x(x^3-64) < 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-4)(x^2+4x+16) < 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-4)\{(x+2)^2+12\} < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 4$$

である。

(答) $0 < x < 4$

(3)

(ア)

 $d_1=|x|, d_2=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$ である。よって

$$\frac{1}{2}d_1=d_2 \Leftrightarrow |x|=2\sqrt{(x-2)^2+y^2}$$

となる。両辺が非負であるから両辺を 2 乗して

$$x^2=4\{(x-2)^2+y^2\}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x-\frac{8}{3}\right)^2+4y^2=\frac{16}{3}$$

となり、これは楕円を表す。よって、点 P の軌跡は楕円 $3\left(x-\frac{8}{3}\right)^2+4y^2=\frac{16}{3}$ である。

$$(答) \text{ 楕円 } 3\left(x-\frac{8}{3}\right)^2+4y^2=\frac{16}{3}$$

(イ)

(ア)と同様にして

$$d_1=d_2 \Leftrightarrow x^2=(x-2)^2+y^2$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}y^2+1$$

となり、これは放物線を表す。よって、点 P の軌跡は放物線 $x=\frac{1}{4}y^2+1$ である。

$$(答) \text{ 放物線 } x=\frac{1}{4}y^2+1$$

(ウ)

(ア)と同様にして

$$2d_1=d_2 \Leftrightarrow 4x^2=(x-2)^2+y^2$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-y^2=\frac{16}{3}$$

となり、これは双曲線を表す。よって、点 P の軌跡は双曲線 $3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-y^2=\frac{16}{3}$ である。

$$(答) \text{ 双曲線 } 3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-y^2=\frac{16}{3}$$

2

(1)

$AB = 2 \sin \frac{\pi}{6} = 1$ であり、 $\angle AOB = 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ である。外接円の半径を R とおくと、正弦定理より、

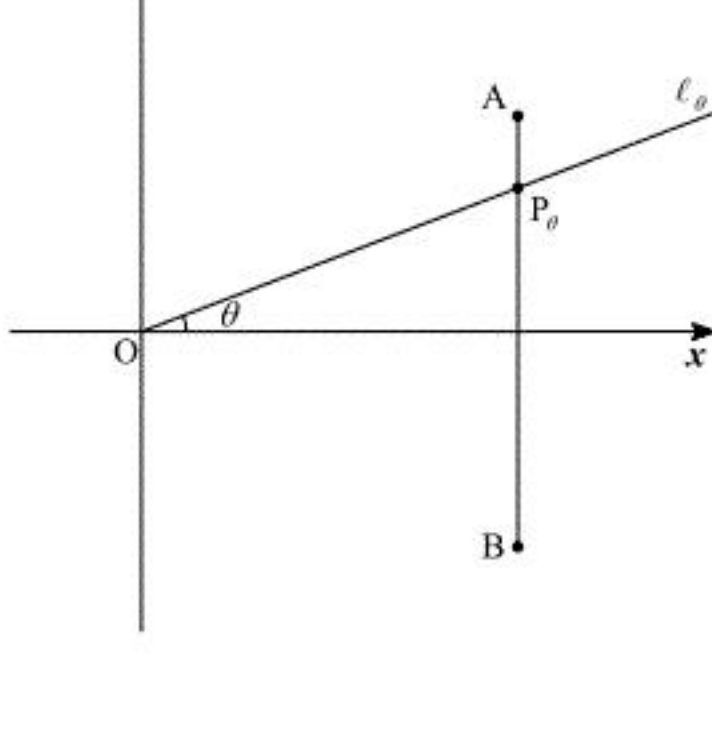
$$R = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{\sin \angle AOB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

である。

(答) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2)

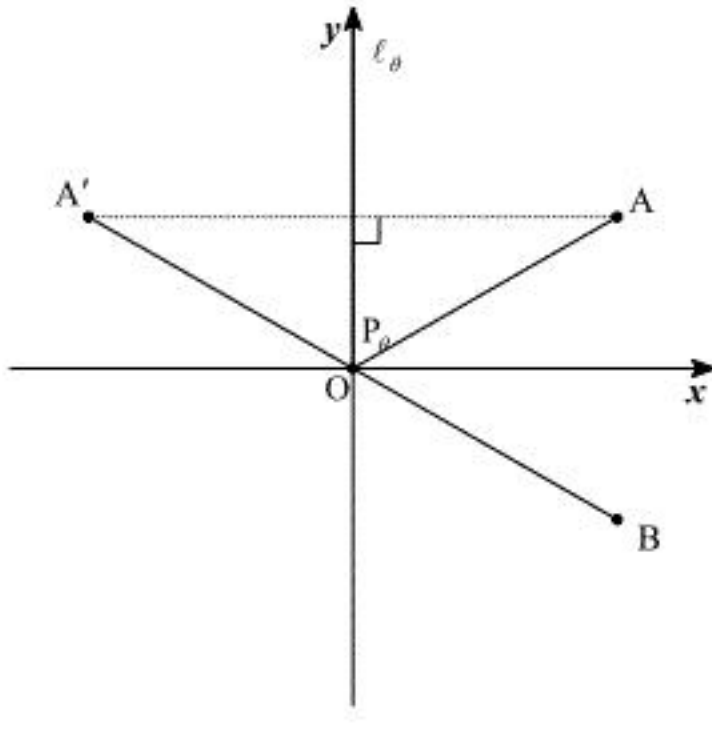
(ア)



題意より、点 A, B と l_θ を図示すると、上図のようになっている。よって、線分 AB と l_θ の交点が P_θ である。 l_θ は $y = (\tan \theta)x$ で表されるから、 $P_\theta \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \theta \right)$ である。

(答) $P_\theta \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \theta \right)$

(イ)



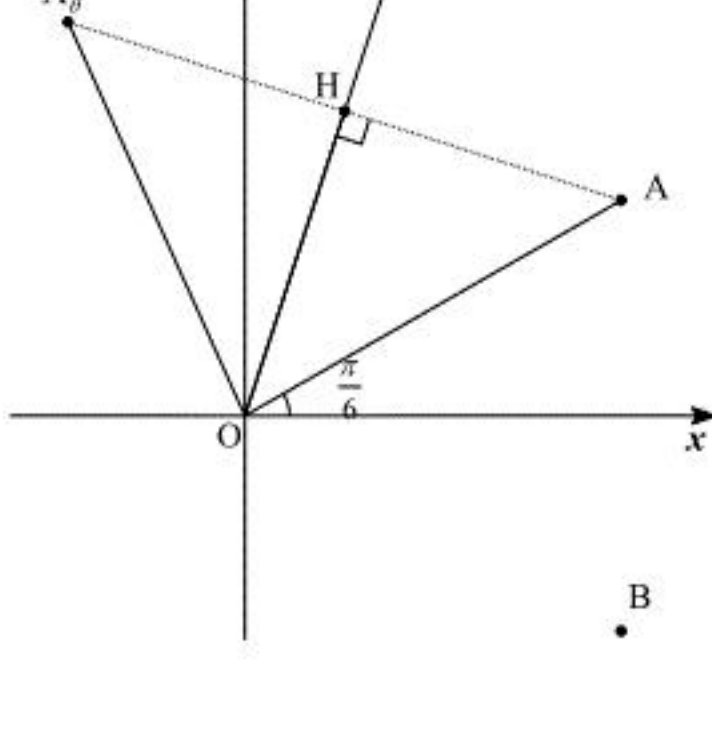
$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき、 l_θ は y 軸の $y \geq 0$ の部分である。点 A と y 軸に関して対称な点を A' とおき、それらを図示すると上図のようになる。

$$AP + PB = A'P + PB$$

であるから、 $A'P + PB$ が最小となる点 P を求めればよい。 $A' \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$ であり、線分 $A'B$ と y 軸の交点を考えると $(0, 0)$ であるが、これは l_θ 上の点であるから、 $P(0, 0)$ のとき $A'P + PB$ は最小になる。よって、 $P_\theta(0, 0)$ である。

(答) $P_\theta(0, 0)$

(3)



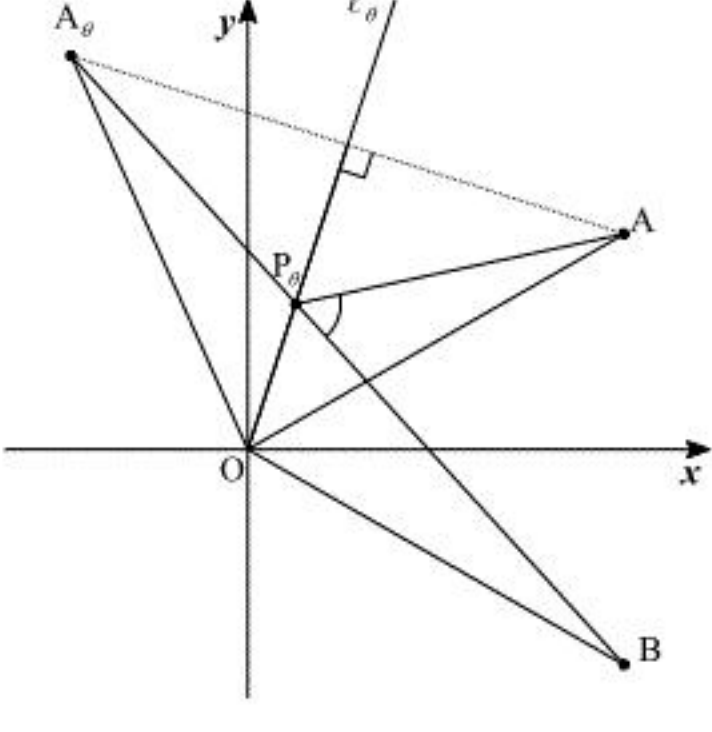
$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、上図のようになっている。 A_θ は原点を通る半直線 l_θ に関して A と対称な点であるので、 $OA_\theta = OA = 1$ であり、 A_θ は単位上の点である。また、半直線 l_θ と直線 AA_θ との交点を H とすると、 $\angle AOH = \angle A_\theta OH$ であり、 $\angle AOH = \theta - \frac{\pi}{6}$ であるから、線分 OA_θ が x 軸の正の向きとなす角は

$$2 \cdot \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\pi}{6} = 2\theta - \frac{\pi}{6}$$

となる。よって、 $A_\theta \left(\cos \left(2\theta - \frac{\pi}{6} \right), \sin \left(2\theta - \frac{\pi}{6} \right) \right)$ である。

(答) $A_\theta \left(\cos \left(2\theta - \frac{\pi}{6} \right), \sin \left(2\theta - \frac{\pi}{6} \right) \right)$

(4)



$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、上図のようになっている。図より l_θ と線分 $A_\theta B$ は交点を持つ。よって、

$$AP + PB = A_\theta P + PB \geq A_\theta B$$

であるから、 P_θ は l_θ と線分 $A_\theta B$ の交点である。(3)より

$$OA_\theta = OA = OB$$

$$\angle BOA_\theta = \left(2\theta - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\pi}{6} = 2\theta$$

である。よって、三角形 $OA_\theta B$ は $OA_\theta = OB$ の二等辺三角形であるから

$$\angle OA_\theta B = \frac{\pi - 2\theta}{2} = \frac{\pi}{2} - \theta$$

である。また、 $\angle AOA_\theta = 2 \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right)$ であり、三角形 $OA_\theta A$ は $OA_\theta = OA$ の二等辺三角形であるから、

$$\angle OA_\theta A = \frac{\pi - \angle AOA_\theta}{2} = \frac{2}{3} \pi - \theta$$

である。よって、 $AP_\theta = A_\theta P_\theta$ より

$$\angle A_\theta AP_\theta = \angle AA_\theta P_\theta = \angle OA_\theta A - \angle OA_\theta B = \left(\frac{2}{3} \pi - \theta \right) - \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \frac{\pi}{6}$$

である。よって、

$$\angle AP_\theta B = \angle A_\theta AP_\theta + \angle AA_\theta P_\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

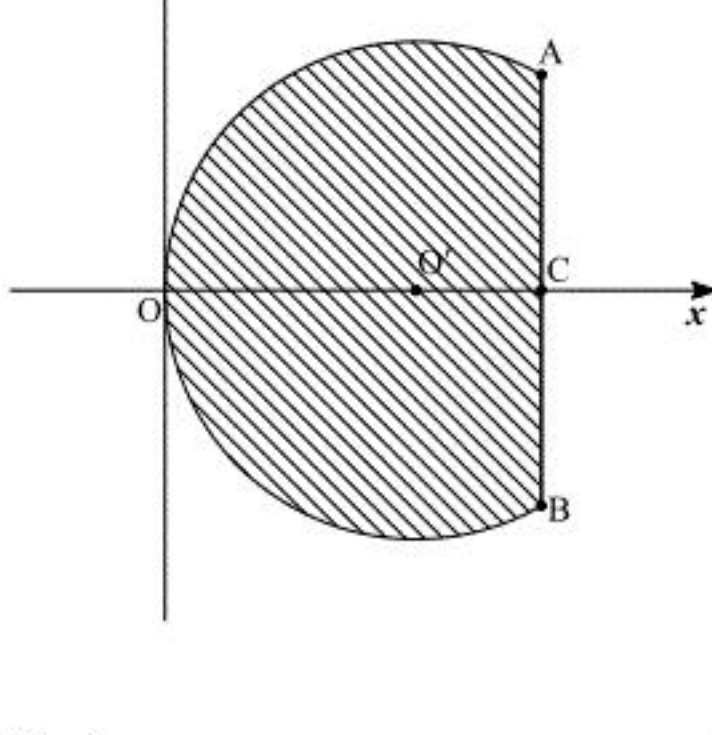
である。

(答) $\frac{\pi}{3}$

(5)

$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、(4)より $\angle AOB = \angle AP_\theta B$ であるから、円周角の定理より点 P_θ は三角形 OAB の外接円の2つの弧 OA のうち、点 B を含まない方の弧 OA (端点は含まない)上を動く。また、線分 AB と x 軸との交点を C とすると、(2)より $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ のとき、点 P_θ は線分 AC 上を動き、

$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき $P_\theta(0, 0)$ である。 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$ のときは、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のときと x 軸に関して対称であることに注意すると、点 P_θ の描く曲線で囲まれた図形は以下の図の斜線部分となる。



なお、円の中心を $O' \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right)$ とした。 $\angle AO'C = \phi$ とおくと、 $O'A = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $O'C = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$,

$AC = \frac{1}{2}$ であり、 $\cos \phi = \frac{1}{2}$, $\sin \phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となるから、 $\phi = \frac{\pi}{3}$ である。したがって、対称性より、この領域は三角形 $O'AB$ と半径 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 中心角 $\frac{4}{3}\pi$ の扇形を合わせたものである。よって、求める面積は

$$\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{2\pi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 1 = \frac{2}{9} \pi + \frac{\sqrt{3}}{12}$$

である。

(答) $\frac{2}{9} \pi + \frac{\sqrt{3}}{12}$

(1)

トーナメント表の①から④枠に振り分けられる確率は等しいから、Aが準決勝でB, C, Dと対戦する確率はそれぞれ等しい。よって、準決勝でA対Bの対戦が実現する確率は $\frac{1}{3}$ である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{3}$$

(2)

(1)と同様に考えると、Bが準決勝でA, C, Dと対戦する確率はそれぞれ $\frac{1}{3}$ である。それぞれと対戦した際に勝つ確率は $1-p, p, p$ であるから、Bが準決勝で勝つ確率は

$$\frac{1}{3} \cdot (1-p) + \frac{1}{3} \cdot p + \frac{1}{3} \cdot p = \frac{1+p}{3}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1+p}{3}$$

(3)

Bが準決勝でAと対戦して勝つ確率は、 $\frac{1}{3}(1-p)$ である。もう一方の準決勝でCがDに勝ち、決勝でBがCに勝つ確率は $p \cdot p = p^2$ であり、もう一方の準決勝でDがCに勝ち、決勝でBがDに勝つ確率は $(1-p) \cdot p = p(1-p)$ である。よって、Bが準決勝でAに勝って優勝する確率は

$$\frac{1}{3}(1-p) \cdot \{p^2 + p(1-p)\} = \frac{1}{3}p(1-p)$$

である。同様に考えると、Bが準決勝でC, Dに勝って優勝する確率はともに

$$\frac{1}{3}p \cdot \{p(1-p) + (1-p)p\} = \frac{2}{3}p^2(1-p)$$

である。よって、

$$p_B = \frac{1}{3}p(1-p) + 2 \cdot \frac{2}{3}p^2(1-p) = \frac{1}{3}p(1-p)(4p+1)$$

である。

$$(\text{答}) \quad p_B = \frac{1}{3}p(1-p)(4p+1)$$

(4)

Aは誰と対戦しても勝つ確率は p であるから、 $p_A = p^2$ である。同様に、 $p_D = (1-p)^2$ である。

また、A, B, C, Dのいずれかは優勝するから $p_A + p_B + p_C + p_D = 1$ である。したがって、(3)より

$$\begin{aligned} p_C &= 1 - p_A - p_B - p_D \\ &= 1 - p^2 - \frac{1}{3}p(1-p)(4p+1) - (1-p)^2 \\ &= 2p(1-p) - \frac{1}{3}p(1-p)(4p+1) \\ &= \frac{1}{3}p(1-p)(6-4p-1) \\ &= \frac{1}{3}p(1-p)(5-4p) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad p_C = \frac{1}{3}p(1-p)(5-4p)$$

(5)

$$\begin{aligned} p_A &< 2p_B \\ \Leftrightarrow p^2 &< \frac{2}{3}p(1-p)(4p+1) \\ \Leftrightarrow p(8p^2 - 3p - 2) &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{73}}{16} &< p < \frac{3+\sqrt{73}}{16} \quad (\because p > 0) \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

であり、また

$$\begin{aligned} 3p_C &< 2p_B \\ \Leftrightarrow p(1-p)(5-4p) &< \frac{2}{3}p(1-p)(4p+1) \\ \Leftrightarrow 15-12p &< 8p+2 \quad (\because p > 0, 1-p > 0) \\ \Leftrightarrow \frac{13}{20} &< p \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。

$$\frac{3+\sqrt{73}}{16} - \frac{13}{20} = \frac{5\sqrt{73}-37}{80} > \frac{5 \cdot 8 - 37}{80} > 0$$

であるから、 $\frac{3+\sqrt{73}}{16} > \frac{13}{20}$ である。また、 $\frac{3+\sqrt{73}}{16} < \frac{3+9}{16} < 1$ である。よって、①、②と $\frac{1}{2} < p < 1$

の共通部分をとると、

$$\frac{13}{20} < p < \frac{3+\sqrt{73}}{16}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{13}{20} < p < \frac{3+\sqrt{73}}{16}$$

(1)

曲線 $y = \frac{1}{x}$ における $x = t$ での接線は、 $y' = -\frac{1}{x^2}$ であることより、

$$y = \left(-\frac{1}{t^2}\right)(x-t) + \frac{1}{t} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{t^2}x + \frac{2}{t}$$

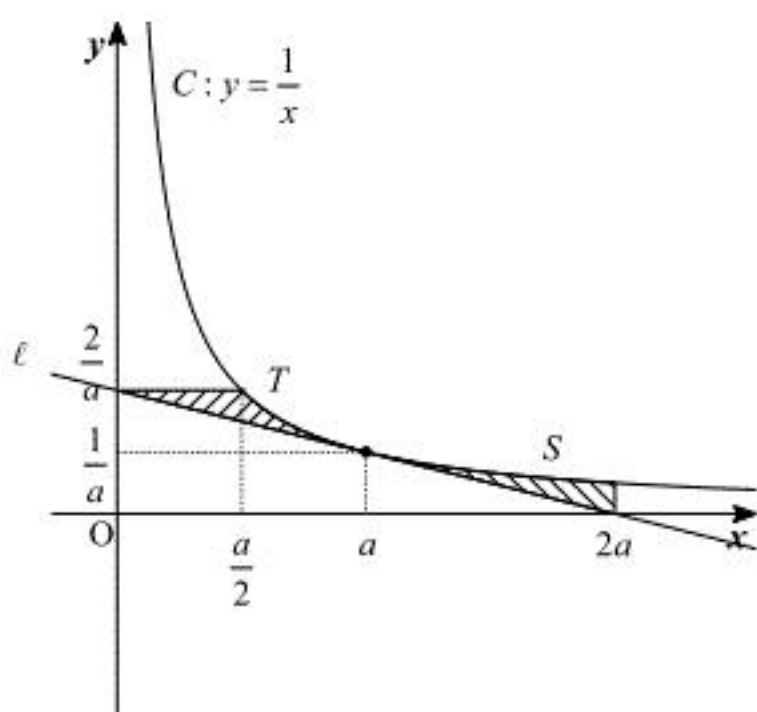
である。この直線が点 $(2a, 0)$ を通るとき

$$0 = -\frac{1}{t^2} \cdot 2a + \frac{2}{t} \Leftrightarrow t = a$$

となる。よって、 $b = a$ である。また、 c はこの接線の y 切片であるから、 $c = \frac{2}{a}$ となる。

$$(\text{答}) \quad b = a, c = \frac{2}{a}$$

(2)



曲線 C 、直線 ℓ 、および S, T を図示すると上図のようになる。よって

$$\begin{aligned} S &= \int_a^{2a} \left\{ \frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a} \right) \right\} dx \\ &= \left[\log|x| + \frac{1}{2a^2}x^2 - \frac{2}{a}x \right]_a^{2a} \\ &= \log 2 + \frac{3}{2} - 2 \\ &= \log 2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

であり、また、曲線 C は $x = \frac{1}{y}$ 、直線 ℓ は $x = -a^2y + 2a$ とかけるから

$$\begin{aligned} T &= \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{2}{a}} \left\{ \frac{1}{y} - (-a^2y + 2a) \right\} dy \\ &= \left[\log|y| + \frac{a^2}{2}y^2 - 2ay \right]_{\frac{1}{a}}^{\frac{2}{a}} \\ &= \log 2 + \frac{3}{2} - 2 \\ &= \log 2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S = \log 2 - \frac{1}{2}, T = \log 2 - \frac{1}{2}$$

(3)

(1)より $b = a$ である。 S を直線 $x = a$ のまわりに1回転してできる立体は、 $x = a$ 、 $x = 2a$ 、

$y = \frac{1}{x}$ 、 x 軸で囲まれた部分を直線 $x = a$ のまわりに1回転してできる立体から、 $x = a$ 、

$y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$ 、 x 軸で囲まれた部分を直線 $x = a$ のまわりに1回転してできる立体を除いたも

のである。よって、

$$\begin{aligned} U &= \pi(2a-a)^2 \cdot \frac{1}{2a} + \pi \int_{\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{a}} \left(\frac{1}{y} - a \right)^2 dy - \frac{1}{3} \cdot \pi(2a-a)^2 \cdot \frac{1}{a} \\ &= \pi \left[-\frac{1}{y} - 2a \log|y| + a^2 y \right]_{\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{a}} + \frac{\pi}{6} a \\ &= \pi \left(a - 2a \log 2 + \frac{1}{2} a \right) + \frac{\pi}{6} a \\ &= \left(\frac{5}{3} - 2 \log 2 \right) \pi a \end{aligned}$$

である。同様に考えて

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \pi(a-0)^2 \cdot \left(\frac{2}{a} - \frac{1}{a} \right) - \pi \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{2}{a}} \left(a - \frac{1}{y} \right)^2 dy \\ &= \frac{\pi}{3} a - \pi \left[-\frac{1}{y} - 2a \log|y| + a^2 y \right]_{\frac{1}{a}}^{\frac{2}{a}} \\ &= \frac{\pi}{3} a - \pi \left(\frac{a}{2} - 2a \log 2 + a \right) \\ &= \left(2 \log 2 - \frac{7}{6} \right) \pi a \end{aligned}$$

となる。また、同様に考えて

$$\begin{aligned} W &= \pi \left(\frac{2}{a} - \frac{1}{a} \right)^2 \cdot \frac{a}{2} + \pi \int_{\frac{a}{2}}^a \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right)^2 dx - \frac{1}{3} \cdot \pi \left(\frac{2}{a} - \frac{1}{a} \right)^2 \cdot a \\ &= \pi \left[-\frac{1}{x} - \frac{2}{a} \log|x| + \frac{x}{a^2} \right]_{\frac{a}{2}}^a + \frac{\pi}{6a} \\ &= \pi \left(\frac{1}{a} - \frac{2}{a} \log 2 + \frac{1}{2a} \right) + \frac{\pi}{6a} \\ &= \left(\frac{5}{3} - 2 \log 2 \right) \frac{\pi}{a} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad U = \left(\frac{5}{3} - 2 \log 2 \right) \pi a, V = \left(2 \log 2 - \frac{7}{6} \right) \pi a, W = \left(\frac{5}{3} - 2 \log 2 \right) \frac{\pi}{a}$$

(4)

(3)の結果より

$$\begin{aligned} U - V &= \left(\frac{5}{3} - 2 \log 2 - 2 \log 2 + \frac{7}{6} \right) \pi a \\ &= \frac{1}{6} (17 - 24 \log 2) \pi a \\ &= \frac{1}{6} (\log e^{17} - \log 2^{24}) \pi a \\ &= \frac{1}{6} \left(\log \frac{e^{17}}{2^{24}} \right) \pi a \end{aligned}$$

となる。題意より $2^{10} < e^7$ であるから、

$$e^{17} > \left(2^{10} \right)^{\frac{17}{7}} = 2^{\frac{170}{7}} = 2^{24 + \frac{2}{7}} > 2^{24}$$

であり、 $\log \frac{e^{17}}{2^{24}} > \log 1 = 0$ である。以上より、 $U > V$ となる。

$$(\text{答}) \quad U > V$$