

数 学 問 題 紙

平成 30 年 2 月 25 日

自 11 : 00

至 12 : 40

答 案 作 成 上 の 注 意

1. 数学の問題紙は 1 から 5 までの 5 ページである。
2. 解答用紙は ③ から ⑥ までの 4 枚である。
3. 解答はすべて解答用紙のおもてのみを用いて書くこと。
4. 問題紙と草案紙は持ち帰ること。

1 次の各問に答えよ.

- (1) 実数 $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ に対して

$$x + y^2 = y + z^2 = z + x^2$$

が成り立つとする. このとき $x = y = z$ であることを証明せよ.

- (2) x を実数とする. このとき, 実数全体からなる集合の 2 つの部分集合

$$P(x) = \{y | t^2 + xt + |y| = 0 \text{ をみたす実数 } t \text{ が存在する}\}$$

$$Q(x) = \{y | \text{すべての実数 } t \text{ に対して } xt^2 + yt + 1 > 0 \text{ が成り立つ}\}$$

を考える. このとき $P(x) \subset Q(x)$ が成り立つための x に関する必要十分条件を求めよ.

- (3) $a > 0$ とし, 点 $P(x, y)$ は, y 軸からの距離 d_1 と点 $(2, 0)$ からの距離 d_2 が $ad_1 = d_2$ をみたすものとする. a が次の値のとき, 点 $P(x, y)$ の軌跡を求めよ.

(ア) $a = \frac{1}{2}$

(イ) $a = 1$

(ウ) $a = 2$

2

座標平面において2点 $A(\cos \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6})$, $B(\cos \frac{\pi}{6}, -\sin \frac{\pi}{6})$ をとる.

また, θ を $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ をみたす実数とし, x 軸の正の向きとなす角が θ であるような原点を端点とする半直線を ℓ_θ とする. 各 θ において, 半直線 ℓ_θ 上を動く点 P の中で, $AP + PB$ の値が最小となるような P を P_θ と定める. 以下の各問に答えよ.

(1) 三角形 OAB の外接円の半径を求めよ.

(2) θ が次の条件をみたすとき, P_θ の座標を求めよ.

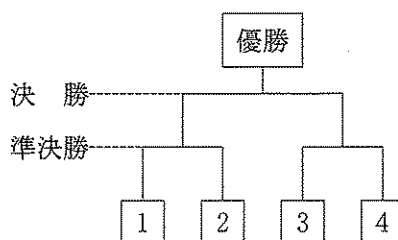
$$(ア) \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \qquad (イ) \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

(3) $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるとき, ℓ_θ に関して A と対称な点 A_θ の座標を求めよ.

(4) $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるとき, $\angle AP_\theta B$ を求めよ.

(5) θ が $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ を動くとき, P_θ の描く曲線で囲まれる部分の面積を求めよ.

3 A, B, C, D の4人が, 右のトーナメント表の 1 から 4 枠に割り振られた後に試合を行う. ただし4人が 1 から 4 枠に割り振られる確率は等しいものとする. 試合ではAが最も強く, 以下, B, Cの順に弱くなっていき, Dが



最も弱い. 自分より弱い人と対戦した際に勝つ確率を p とする. ただし, $\frac{1}{2} < p < 1$ である. また, この試合に「引き分け」は存在せず, 必ず勝敗が決するものとする.

A, B, C, Dそれぞれが優勝する確率をそれぞれ p_A, p_B, p_C, p_D とする. 以下の各問に答えよ.

- (1) 準決勝で「A 対 B」の対戦が実現する確率を求めよ.
- (2) Bが準決勝で勝つ確率を p を用いて表せ.
- (3) p_B を p を用いて表せ.
- (4) p_C を p を用いて表せ.
- (5) $p_A, 2p_B, 3p_C$ を比較したとき, $2p_B$ が最も大きくなる p に関する条件を求めよ.

4 $a > 0$ とする. 座標平面において点 $(2a, 0)$ から曲線 $C: y = \frac{1}{x} (x > 0)$ に引いた接線を ℓ とする. この接点の x 座標を b とし, ℓ と y 軸の交点の座標を $(0, c)$ とする. また, 直線 ℓ と曲線 C および直線 $x = 2a$ で囲まれる部分を S とし, 直線 ℓ と曲線 C および直線 $y = c$ で囲まれる部分を T とする. 以下の各問に答えよ.

(1) b と c を a を用いて表せ.

(2) S と T の面積を求めよ.

S, T を直線 $x = b$ のまわりに 1 回転してできる立体の体積をそれぞれ U, V とする. また, T を直線 $y = \frac{1}{b}$ のまわりに 1 回転してできる立体の体積を W とする.

(3) U, V, W を a を用いて表せ.

(4) U と V の大小関係を求めよ. 必要であれば $2^{10} < e^7$ であることを用いてよい. ただし e は自然対数の底である.

