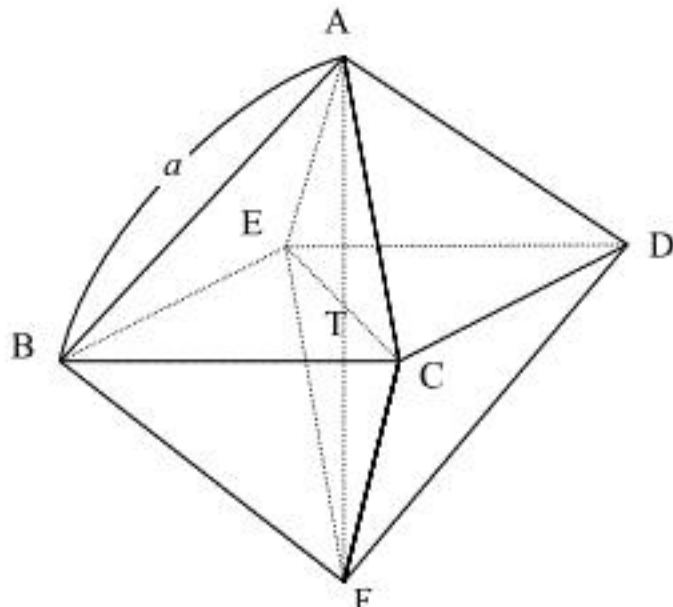


1

(1)



上図のように7点A, B, C, D, E, F, Tをおく。四角形AEFCは一辺の長さが a の正方形であるから、

$$\begin{aligned} AT &= \frac{1}{2} AF \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + a^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} a \end{aligned}$$

となる。よって、四角錐A-BCDEの体積は、

$$\frac{1}{3} \cdot a \cdot a \cdot AT = \frac{1}{3} \cdot a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a = \frac{\sqrt{2}}{6} a^3$$

となる。正八面体A-BCDE-Fの体積は四角錐A-BCDEの2倍であるから、求める体積は

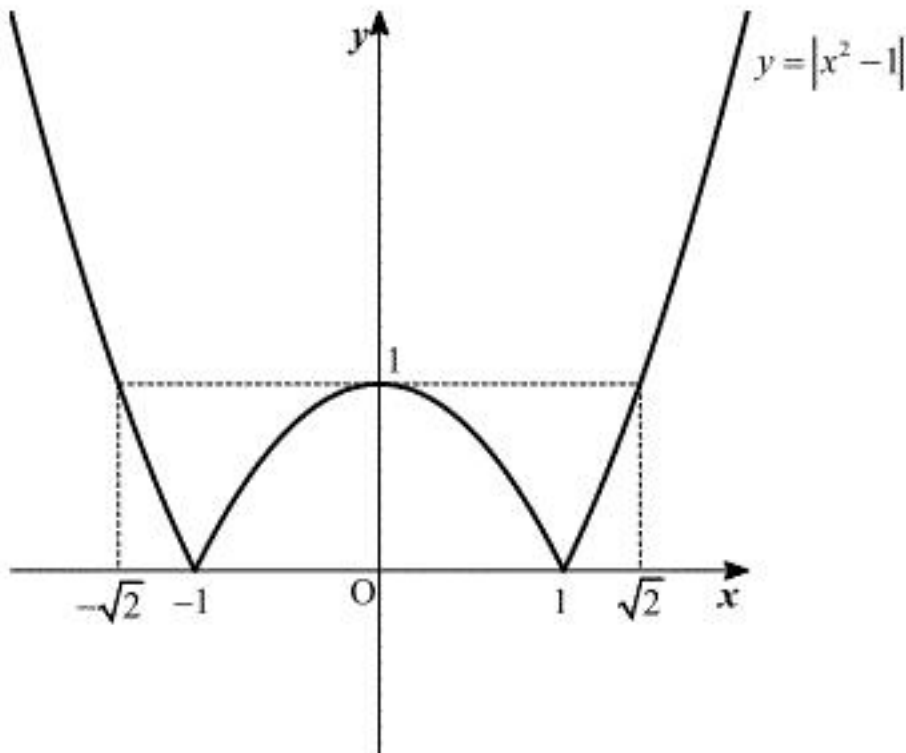
$$2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} a^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} a^3$$

である。

(答) $\frac{\sqrt{2}}{3} a^3$

(2)

$y = f(x) (= |x^2 - 1|)$ のグラフは、 $y = x^2 - 1$ のグラフの $y < 0$ の部分を x 軸に関して折り返したものであり、以下のようになる。



$x < -1, 1 < x$ の範囲で $f(x) = 1$ となるのは、

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow x &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

のときである。以下、 a の値によって場合分けを行う。

[1] $a < -\sqrt{2}$ のとき

図より、 $f(a) > 1$ となるから、 $a \leq x \leq a+1$ の範囲で1は最大値となりえない。

[2] $a = -\sqrt{2}$ のとき

図より、 $-\sqrt{2} \leq x \leq -\sqrt{2} + 1 (< 0)$ の範囲で、 $f(x)$ は、 $x = -\sqrt{2}$ のとき最大値1をとる。

[3] $-\sqrt{2} < a < -1$ のとき

図より、 $(-\sqrt{2} <) a \leq x \leq a+1 (< 0)$ の範囲で、 $f(x)$ は1未満である。よって1は最大値となりえない。

[4] $-1 \leq a \leq -\frac{1}{2}$ のとき

図より、 $a \leq x \leq a+1$ の範囲で、 $f(x)$ は、 $x = 0$ のとき最大値1をとる。

以上、[1], [2], [3], [4]より、 $a \leq -\frac{1}{2}$ の範囲で条件を満たす a は、 $a = -\sqrt{2}$ 、 $-1 \leq a \leq -\frac{1}{2}$ である。

y 軸に関する対称性より、 $a \geq -\frac{1}{2}$ の範囲で求める a の条件は、 $a+1 = \sqrt{2}$ 、 $\frac{1}{2} \leq a+1 \leq 1$ 、

すなわち $a = -1 - \sqrt{2}$ 、 $-\frac{1}{2} \leq a \leq 0$ である。以上を合わせて、求める条件は、

$$-1 \leq a \leq 0, \quad a = -\sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}$$

となる。

(答) $-1 \leq a \leq 0, \quad a = -\sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}$

(3)(i)

数列 $\{2^n\}$ の最初の14項は、

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384$$

となる。したがって、 2^n が4桁の数になるのは $n = 10, 11, 12, 13$ のときである。

(答) $n = 10, 11, 12, 13$

(ii)

(i)より $10^3 < 2^{10}$ 、 $2^{13} < 10^4$ である。それぞれ常用対数を取ると

$$\begin{aligned} 3 &< 10 \log_{10} 2 \text{ かつ } 13 \log_{10} 2 < 4 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{10} &< \log_{10} 2 < \frac{4}{13} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。 5^{130} の桁数を n とすると $10^{n-1} \leq 5^{130} < 10^n$ と表せる。常用対数をとると

$$\begin{aligned} n-1 &\leq 130 \log_{10} 5 < n \\ \Leftrightarrow 130(1 - \log_{10} 2) &< n \leq 130(1 - \log_{10} 2) + 1 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。①を利用すると

$$\begin{aligned} 130 \cdot \left(1 - \frac{4}{13}\right) &< 130(1 - \log_{10} 2) < 130 \cdot \left(1 - \frac{3}{10}\right) \\ \Leftrightarrow 90 &< 130(1 - \log_{10} 2) < 91 \end{aligned}$$

であるから、②と合わせて、

$$90 < n < 92$$

となる。よって、 $n = 91$ である。

(答) 91桁

(1)

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OS}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{OP} = s\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OQ} = t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OR} = (1-t)\vec{b} + t\vec{c}$$

$$\overrightarrow{OS} = s\vec{c}$$

と表せる。よって

$$\overrightarrow{QR} = -t\vec{a} + t\vec{c}$$

$$\overrightarrow{PS} = -s\vec{a} + s\vec{c}$$

となり、

$$\overrightarrow{QR} = \frac{t}{s} \overrightarrow{PS} \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

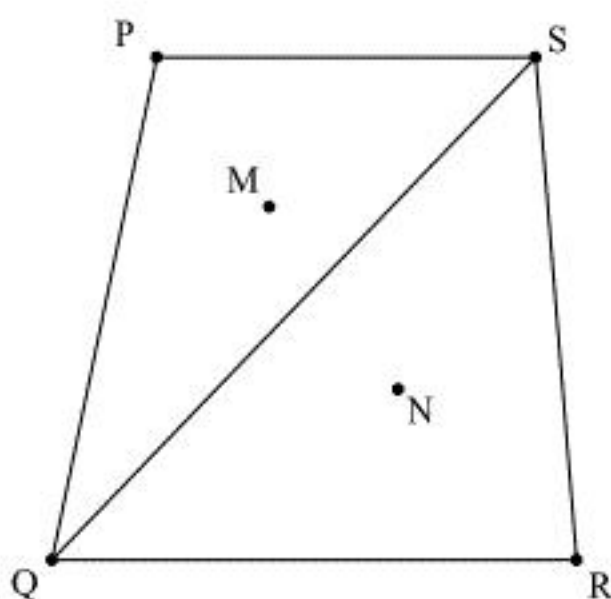
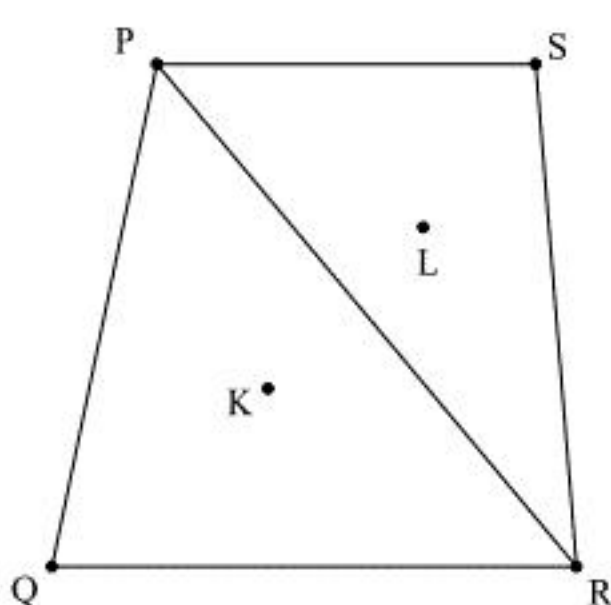
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \frac{t}{s} \overrightarrow{PS}$$

と表せることから 4 点 P, Q, R, S は同一平面上にある。

(証明終)

(2)

四角形 PQRS と 4 点 K, L, M, N を図示すると以下のようになる。



①より、四角形 PQRS が台形であることから、

$$S_{PQR} : S_{PRS} = QR : PS = \frac{t}{s} : 1 = t : s$$

$$S_{QRS} : S_{PQS} = QR : PS = t : s$$

となる。従って $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{OG'}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \frac{t}{t+s} \overrightarrow{OK} + \frac{s}{t+s} \overrightarrow{OL} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{t}{t+s} (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}) + \frac{1}{3} \cdot \frac{s}{t+s} (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS}) \\ &= \frac{1}{3} \left(\overrightarrow{OP} + \frac{t}{t+s} \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} + \frac{s}{t+s} \overrightarrow{OS} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG'} &= \frac{s}{t+s} \overrightarrow{OM} + \frac{t}{t+s} \overrightarrow{ON} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{s}{t+s} (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OS}) + \frac{1}{3} \cdot \frac{t}{t+s} (\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS}) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{s}{t+s} \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \frac{t}{t+s} \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS} \right) \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OG'} &= \frac{1}{3} \left(\frac{t}{t+s} \overrightarrow{OP} - \frac{s}{t+s} \overrightarrow{OQ} + \frac{s}{t+s} \overrightarrow{OR} - \frac{t}{t+s} \overrightarrow{OS} \right) \\ &= \frac{1}{3} \frac{s}{t+s} \left(\overrightarrow{QR} - \frac{t}{s} \overrightarrow{PS} \right) \\ &= 0 \quad (\because \textcircled{1}) \end{aligned}$$

と表せるので、G と G' は一致する。

(証明終)

(3)

辺 AC の中点を D とすると

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{c}$$

である。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \frac{1}{3} \left(\overrightarrow{OP} + \frac{t}{t+s} \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} + \frac{s}{t+s} \overrightarrow{OS} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left[s\vec{a} + \frac{t}{t+s} \{ t\vec{a} + (1-t)\vec{b} \} + (1-t)\vec{b} + t\vec{c} + \frac{s}{t+s} s\vec{c} \right] \\ &= \frac{1}{3(t+s)} \{ (t^2 + ts + s^2) \vec{a} + (1-t)(2t+s)\vec{b} + (t^2 + ts + s^2) \vec{c} \} \\ &= \frac{t^2 + ts + s^2}{6(t+s)} \left(\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{c} \right) + \frac{(1-t)(2t+s)}{3(t+s)} \vec{b} \\ &= \frac{t^2 + ts + s^2}{6(t+s)} \overrightarrow{OD} + \frac{(1-t)(2t+s)}{3(t+s)} \overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

と表せるから、4 点 O, B, G, D は同一平面上にある。すなわち、3 点 O, B, G を通る平面は AC の中点を通る。

(証明終)

3

(1)

$$2^N \equiv (-1)^N \pmod{3}$$

であるから、 N が偶数のとき $2^N \equiv 1 \pmod{3}$ 、 N が奇数のとき $2^N \equiv -1 \equiv 2 \pmod{3}$ である。よって、 2^N を 3 で割った余りは、

$$\begin{cases} 1 & (N \text{ が偶数のとき}) \\ 2 & (N \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \begin{cases} 1 & (N \text{ が偶数のとき}) \\ 2 & (N \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

(2)(i)

2 進法を考えると、0 以上 $2^n - 1$ の各整数 m に対して $m = \sum_{i=1}^n 2^{i-1} x_i$ となるような $x_1, x_2, \dots, x_n$

はただ 1 組存在する。よって $X = m$ となる確率は $\frac{1}{2^n}$ となる。したがって、 X が 3 の倍数にな

る確率は 0 以上 $2^n - 1$ 以下の 3 の倍数の個数に $\frac{1}{2^n}$ をかけたものである。以下 n の偶奇によっ

て場合分けを行う。

[1] n が偶数のとき

(1) より、 $2^n - 1$ が 3 で割り切れるから、0 以上 $2^n - 1$ 以下の 3 の倍数の個数は

$$\frac{2^n - 1}{3} + 1 = \frac{2^n}{3} + \frac{2}{3}$$

である。よって、求める確率は

$$\left(\frac{2^n}{3} + \frac{2}{3} \right) \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}}$$

となる。

[2] n が奇数のとき

(1) より、 $2^n - 1$ を 3 で割った余りは 1 であるから、0 以上 $2^n - 1$ 以下の 3 の倍数の個数は

$$\frac{2^n - 1 - 1}{3} + 1 = \frac{2^n}{3} + \frac{1}{3}$$

である。よって、求める確率は

$$\left(\frac{2^n}{3} + \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 2^n}$$

となる。

以上 [1], [2] より求める確率は

$$\begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} & (N \text{ が偶数のとき}) \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 2^n} & (N \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} & (N \text{ が偶数のとき}) \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 2^n} & (N \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

(ii)

X が 3 の倍数になるときの $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を具体的に考える。

[1] $n = 1$ のとき

X が 3 の倍数になるのは $x_1 = 0$ のときであるから、求める確率は

$$p_1 = a$$

である。

[2] $n = 2$ のとき

$2^2 - 1 = 3$ より X が 3 の倍数になるのは $X = 0, 3$ すなわち $(x_1, x_2) = (0, 0), (1, 1)$ のときで

あるから、求める確率は

$$\begin{aligned} p_2 &= a \cdot a + (1 - a)(1 - a) \\ &= 2a^2 - 2a + 1 \end{aligned}$$

である。

[3] $n = 3$ のとき

$2^3 - 1 = 7$ より X が 3 の倍数になるのは $X = 0, 3, 6$ すなわち

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1)$$

のときであるから、求める確率は

$$\begin{aligned} p_3 &= a \cdot a \cdot a + (1 - a)(1 - a)a + a(1 - a)(1 - a) \\ &= 3a^3 - 4a^2 + 2a \end{aligned}$$

である。

[4] $n = 4$ のとき

$2^4 - 1 = 15$ より X が 3 の倍数になるのは $X = 0, 3, 6, 9, 12, 15$ すなわち

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1)$$

のときであるから、求める確率は

$$\begin{aligned} p_4 &= a^4 + 4a^2(1 - a)^2 + (1 - a)^4 \\ &= 6a^4 - 12a^3 + 10a^2 - 4a + 1 \end{aligned}$$

である。

以上, [1], [2], [3], [4] より求める確率は

$$\begin{cases} p_1 = a \\ p_2 = 2a^2 - 2a + 1 \\ p_3 = 3a^3 - 4a^2 + 2a \\ p_4 = 6a^4 - 12a^3 + 10a^2 - 4a + 1 \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \begin{cases} p_1 = a \\ p_2 = 2a^2 - 2a + 1 \\ p_3 = 3a^3 - 4a^2 + 2a \\ p_4 = 6a^4 - 12a^3 + 10a^2 - 4a + 1 \end{cases}$$

(iii)

$p_2 = f(a)$, $p_4 = g(a)$ とおくと、 $f(a)$ について

$$\begin{aligned} f(a) &= 2a^2 - 2a + 1 \\ &= 2 \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。 $0 < \frac{1}{2} < 1$ より、 $p_2 = f(a)$ は $a = \frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{1}{2}$ をとる。また、

$$\begin{aligned} g'(a) &= 24a^3 - 36a^2 + 20a - 4 \\ &= 4(6a^3 - 9a^2 + 5a - 1) \\ &= 4(2a - 1)(3a^2 - 3a + 1) \end{aligned}$$

となる。 $3a^2 - 3a + 1 = 3 \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} > 0$ であるから、 $g(a)$ の増減表は以下のようになる。

a	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$g'(a)$		-	0	+	
$g(a)$			極小		

したがって $p_4 = g(a)$ は $a = \frac{1}{2}$ のとき最小値 $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$ をとる。

$$(\text{答}) \begin{cases} p_2 \text{ の最小値 } \frac{1}{2} \\ p_4 \text{ の最小値 } \frac{3}{8} \end{cases}$$

(1)

$\frac{dx}{d\theta}, \frac{dy}{d\theta}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta} &= a(1 - \cos \theta) \\ \frac{dy}{d\theta} &= a \sin \theta\end{aligned}$$

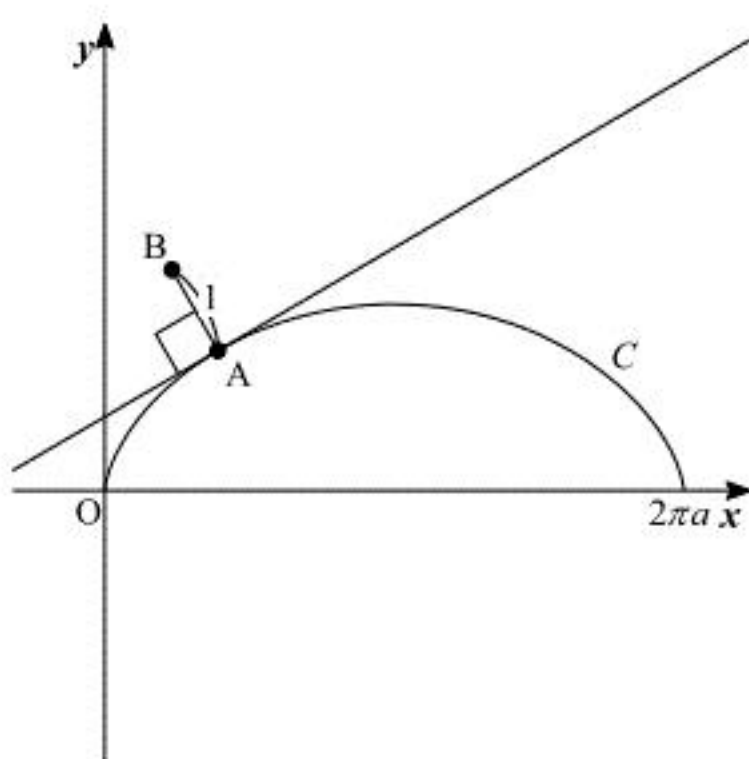
である。よって曲線 C の長さ L は

$$\begin{aligned}L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} d\theta \quad (\because a > 0) \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos \theta} d\theta \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta \\ &= a \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{\theta}{2} d\theta \quad \left(\because \sin \frac{\theta}{2} > 0\right) \\ &= 2a \left[-2 \cos \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= 8a\end{aligned}$$

となる。

(答) $8a$

(2)



(1)より、 $0 < \theta < 2\pi$ のとき、

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \\ &= \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}\end{aligned}$$

である。よって、 $\overline{AB}$ は $\begin{pmatrix} -\cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ と平行である。 $|\overline{AB}| = 1$ より、 $\overline{AB} = \pm \begin{pmatrix} -\cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ であるが、点 B

の y 座標は点 A の y 座標より大きいから、 $\overline{AB}$ の y 成分は正である。 $\sin \frac{\theta}{2} > 0$ より、

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} -\cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

を得る。したがって、

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} = \begin{pmatrix} a(\theta - \sin \theta) - \cos \frac{\theta}{2} \\ a(1 - \cos \theta) + \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

となり、点 B の座標は $\left(a(\theta - \sin \theta) - \cos \frac{\theta}{2}, a(1 - \cos \theta) + \sin \frac{\theta}{2}\right)$ である。これは $\theta = 0, 2\pi$ のときも成り立つ。

$$(答) \left(a(\theta - \sin \theta) - \cos \frac{\theta}{2}, a(1 - \cos \theta) + \sin \frac{\theta}{2}\right)$$

(3)

点 B の座標を (x_1, y_1) と表すとする $\frac{dx_1}{d\theta}, \frac{dy_1}{d\theta}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{d\theta} &= a(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ &= \sin \frac{\theta}{2} \left(2a \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ \frac{dy_1}{d\theta} &= a \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ &= \cos \frac{\theta}{2} \left(2a \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

である。ただし、それぞれ 2 倍角の公式を用いた。よって曲線 C_1 の長さ L_1 は

$$\begin{aligned}L_1 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{d\theta}\right)^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left\{\sin \frac{\theta}{2} \left(2a \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\right)\right\}^2 + \left\{\cos \frac{\theta}{2} \left(2a \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\right)\right\}^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(2a \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\right)^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(2a \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\right) d\theta \quad \left(\because a > 0, \sin \frac{\theta}{2} > 0\right) \\ &= \left[-4a \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \theta\right]_0^{2\pi} \\ &= (4a + \pi) - (-4a) \\ &= 8a + \pi\end{aligned}$$

となる。

(答) $8a + \pi$