

【解答】

(1) ア	平均値			(1) イ	中央値		
(2) ウ	4	(2) エ	2	(3) オ	2	(4) カ	14

【解説】

(1)

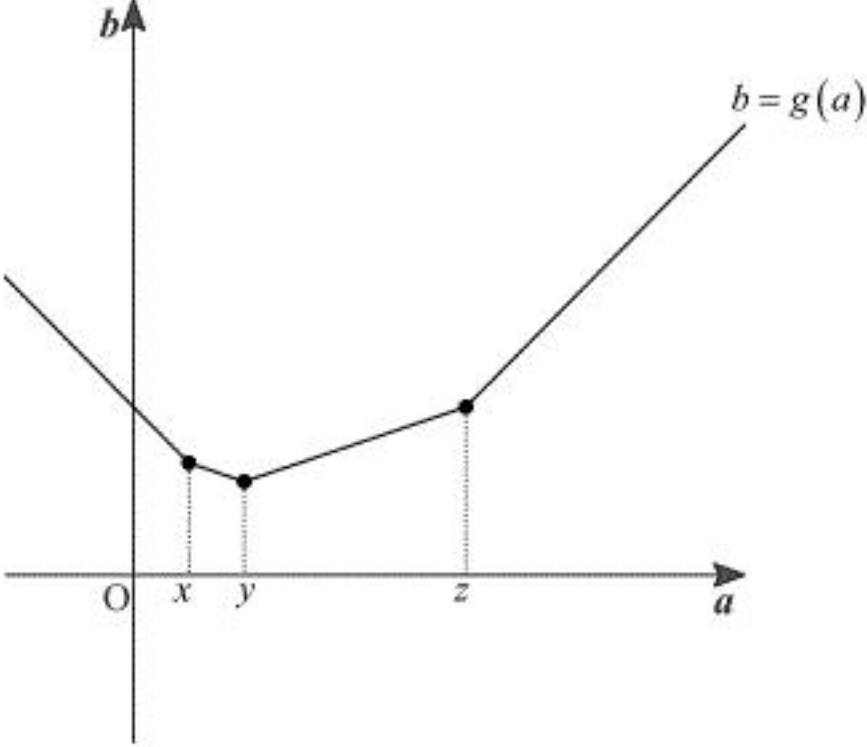
3つのデータを $x, y, z (x < y < z)$ とする(つまり $x=1, y=2, z=6$ とする)。 $f(a)$ を a について平方完成すると

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{3} \left\{ (x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 \right\} \\ &= a^2 - \frac{2}{3} (x+y+z) a + \frac{x^2+y^2+z^2}{3} \\ &= \left(a - \frac{x+y+z}{3} \right)^2 + \frac{2}{9} (x^2+y^2+z^2 - xy - yz - zx) \end{aligned}$$

となるから、 $f(a)$ を最小にする a は $a = \frac{x+y+z}{3}$ であり、これは3つのデータの平均値である。次に $g(a)$ について考える。

$$g(a) = \begin{cases} a-3 (a > z) \\ \frac{1}{3} (a+3) (y < a \leq z) \\ \frac{1}{3} (7-a) (x < a \leq y) \\ 3-a (a \leq x) \end{cases}$$

より、 $b = g(a)$ のグラフを図示すると以下のようになる。



上のグラフより $g(a)$ を最小にする a は $a = y$ ，すなわちデータの中央値である。

(2)

因数定理より、

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx - b &= (x-p)^2 (x-q) \\ \Leftrightarrow x^3 + ax^2 + bx - b &= x^3 - (2p+q)x^2 + (p^2+2pq)x - p^2q \end{aligned}$$

が成り立つ。これは x の恒等式だから、両辺で係数比較して

$$\begin{cases} a = -(2p+q) & \cdots \cdots \text{①} \\ b = p^2 + 2pq & \cdots \cdots \text{②} \\ -b = -p^2q & \cdots \cdots \text{③} \end{cases}$$

を得る。ここで、 $b > 0$ と③より、 $p \neq 0, q > 0$ である。②を③に代入して

$$\begin{aligned} -(p^2 + 2pq) &= -p^2q \\ \Leftrightarrow (p-2)(q-1) &= 2 \quad (\because p \neq 0) \end{aligned}$$

となる。 p, q は整数だから、 $(p, q) = (3, 3), (1, -1), (4, 2), (0, 0)$ が必要である。さらに $q > 0, p \neq q$ であるから、 $(p, q) = (4, 2)$ が必要である。ここで、 $(a, b) = (-10, 32)$ とすると

$$\begin{aligned} x^3 - 10x^2 + 32x - 32 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-4)^2 (x-2) &= 0 \end{aligned}$$

となり、これで十分である。

(3)

部分積分を用いて

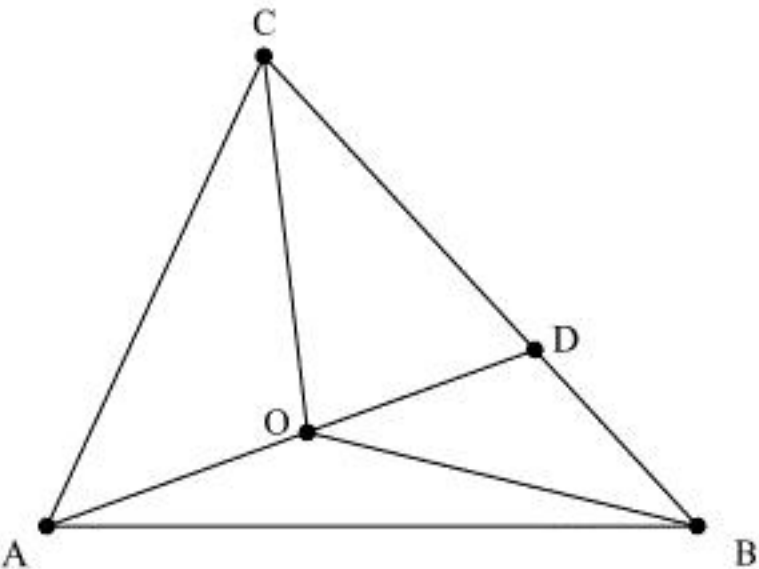
$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x (\tan x)' dx \\ &= \left[x \tan x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (x)' \tan x dx \\ &= \frac{4\sqrt{3}-3}{12} \pi - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= \frac{4\sqrt{3}-3}{12} \pi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx \\ &= \frac{4\sqrt{3}-3}{12} \pi + \left[\log |\cos x| \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{4\sqrt{3}-3}{12} \pi - \frac{1}{2} \log 2 \end{aligned}$$

となる。

(4)

$$\begin{aligned} 7\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 7\overrightarrow{AO} &= 5(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO}) + 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AO}) \\ \therefore \overrightarrow{AO} &= \frac{8}{15} \cdot \frac{5\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}}{8} \end{aligned}$$

である。点 D を $\overrightarrow{AD} = \frac{5\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}}{8}$ によって定める。これらの点を図示すると以下のようになる。



ここで $AO:OD=8:7$ であるから、

$$\begin{aligned} \triangle OBC &= \frac{OD}{AD} \triangle ABC \\ &= \frac{7}{15} \cdot 30 \\ &= 14 \end{aligned}$$

となる。

【解答】

(1) キ	b^2+1	(1) ク	a^2+1	(2) ケ	$-\frac{a}{b}$	(2) コ	$\frac{b}{a}$
----------	---------	----------	---------	----------	----------------	----------	---------------

(3)

$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t)$ を求めると、

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) &= 1 + \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{(ta-b)^2}{t^2+1} \\ &= 1 + \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\left(a - \frac{b}{t}\right)^2}{1 + \frac{1}{t^2}} \\ &= a^2 + 1\end{aligned}$$

となる。また $f(t)$ の増減表をかくと

t	...	$-\frac{a}{b}$	...	$\frac{b}{a}$	...
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	$\nearrow$	a^2+b^2+1	$\searrow$	1	$\nearrow$

となる。ここで、 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = a^2 + 1$ であるから、極大値が最大値、極小値が最小値と

なる。よって最大値を与える t は $t = -\frac{a}{b}$ 、最小値を与える t は $t = \frac{b}{a}$ となる。

結 論	最 大 値	$t = -\frac{a}{b}$	最 小 値	$t = \frac{b}{a}$
--------	-------------	--------------------	-------------	-------------------

【解説】

(1)

点と直線の距離の公式より、直線 $y = tx \Leftrightarrow tx - y = 0$ と各点との距離は

$$\begin{aligned}d_1^2 &= \frac{(t \cdot 1 - 1 \cdot 0)^2}{t^2 + 1^2} = \frac{t^2}{t^2 + 1} \\ d_2^2 &= \frac{(t \cdot 0 - 1 \cdot 1)^2}{t^2 + 1^2} = \frac{1}{t^2 + 1} \\ d_3^2 &= \frac{(t \cdot a - 1 \cdot b)^2}{t^2 + 1} = \frac{(ta-b)^2}{t^2 + 1}\end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{t^2}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1} + \frac{(ta-b)^2}{t^2+1} \\ &= 1 + \frac{(ta-b)^2}{t^2+1}\end{aligned}$$

となる。よって

$$f(0) = b^2 + 1$$

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) &= 1 + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(ta-b)^2}{t^2+1} \\ &= 1 + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left(a - \frac{b}{t}\right)^2}{1 + \frac{1}{t^2}} \\ &= a^2 + 1\end{aligned}$$

となる。

(2)

$f(t) = 1 + \frac{(ta-b)^2}{t^2+1}$ について

$$\begin{aligned}f'(t) &= \frac{2a(ta-b)(t^2+1) - 2t(ta-b)^2}{(t^2+1)^2} \\ &= \frac{2ab\left(t - \frac{b}{a}\right)\left(t + \frac{a}{b}\right)}{(t^2+1)^2}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}f'(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2ab\left(t - \frac{b}{a}\right)\left(t + \frac{a}{b}\right)}{(t^2+1)^2} &= 0 \\ \therefore t &= -\frac{a}{b}, \frac{b}{a}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $a > 0, b > 0$ より、 $-\frac{a}{b} < 0 < \frac{b}{a}$ である。したがって、小さい方から $-\frac{a}{b}, \frac{b}{a}$ である。

【解答】

(1)	$(x+k)^2 + \frac{(y-k)^2}{4} = 1$		
(2)	$k = \pm\sqrt{5}$	(3)	$-\frac{3\sqrt{5}}{5} < k < \frac{3\sqrt{5}}{5}$

【解説】

(1)

点 (x, y) が直線 $y = x + k$ 上にないとき、点 (x, y) と (X, Y) が直線 $y = x + k$ に関して対称であるということは、中点が直線 $y = x + k$ 上に存在するということであるから、

$$\frac{y+Y}{2} = \frac{x+X}{2} + k$$

を満たす。また、2点を結ぶ直線が直線 $y = x + k$ と直交するため

$$Y - y = -(X - x)$$

を満たす。よって x, y を X, Y で表すと

$$\begin{cases} \frac{y+Y}{2} = \frac{x+X}{2} + k \\ Y - y = -(X - x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = Y - X - 2k \\ x + y = X + Y \end{cases}$$

$$\therefore x = Y - k, y = X + k$$

となる。点 (x, y) が楕円 C 上を動くとき、 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ をみたすから、

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (X+k)^2 + \frac{(Y-k)^2}{4} = 1$$

を得る。ゆえに、点 (X, Y) が動いて描く曲線 C_1 の方程式は

$$(x+k)^2 + \frac{(y-k)^2}{4} = 1$$

となる。また点 (x, y) が直線 $y = x + k$ 上にあるとき、点 (x, y) と (X, Y) は一致するため、

$$x = Y - k, y = X + k \text{ が成立する。よってこのときも点 } (X, Y) \text{ は曲線 } (x+k)^2 + \frac{(y-k)^2}{4} = 1 \text{ 上に}$$

ある。

(2)

2つの曲線の方程式を連立すると

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ (x+k)^2 + \frac{(y-k)^2}{4} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ 4(x+k)^2 + (y-k)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ 3x^2 + 8kx - 3y^2 - 2ky + 5k^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ (x-y+k)(3x+3y+5k) = 0 \end{cases}$$

となるから、直線 $x - y + k = 0$ と直線 $3x + 3y + 5k = 0$ の楕円 C との共有点が、2つの楕円の共

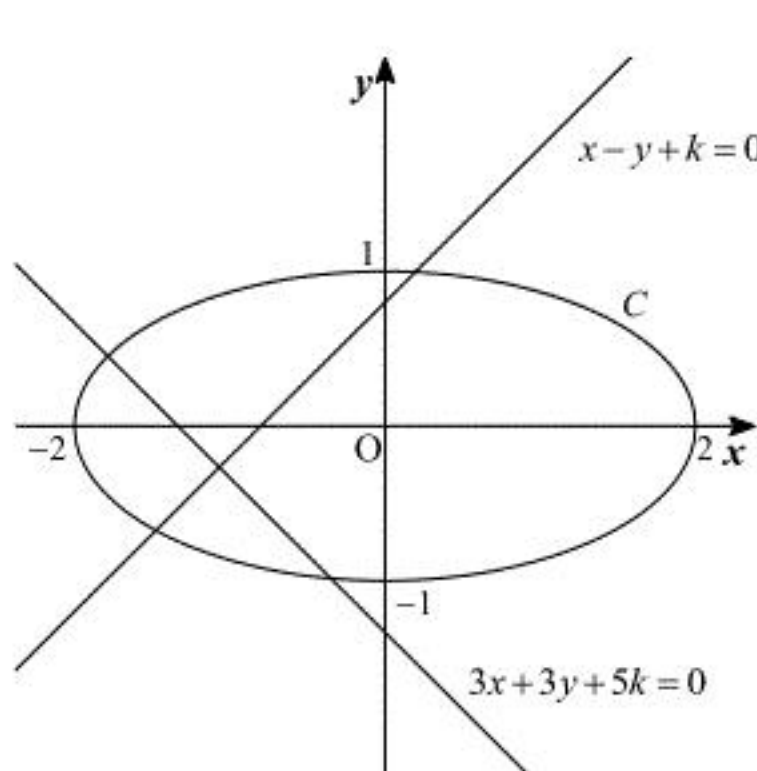
有点と一致する。2直線の交点は $\left(-\frac{4}{3}k, -\frac{1}{3}k\right)$ である。これが楕円 C 上に存在するのは

$$\left(-\frac{4}{3}k\right)^2 + 4\left(-\frac{1}{3}k\right)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{9}{5}$$

$$\Leftrightarrow k = \pm \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

であるから、このとき以外はそれぞれの直線の交点を独立に考えてよい。図示すると以下のようになる。



まず直線 $x - y + k = 0$ について考える。すなわち、楕円の方程式と連立して得られる

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ x - y + k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ x = y - k \end{cases}$$

を考える。下式を上式に代入して

$$(y-k)^2 + 4y^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 5y^2 - 2ky + k^2 - 4 = 0$$

となる。この2次方程式の判別式が正のとき直線 $x - y + k = 0$ と曲線 C の共有点2つ、0のとき共有点1つ、負のとき共有点なしである。判別式を D_1 として

$$\frac{D_1}{4} = k^2 - 5(k^2 - 4)$$

$$= 4(\sqrt{5} - k)(\sqrt{5} + k)$$

である。よって共有点の数は

$$\begin{cases} 2 \left(-\sqrt{5} < k < \sqrt{5} \right) \\ 1 \left(k = \pm\sqrt{5} \right) \\ 0 \left(k < -\sqrt{5}, \sqrt{5} < k \right) \end{cases}$$

となる。同様に直線 $3x + 3y + 5k = 0$ について考える。すなわち、楕円の方程式と連立して得られる

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ 3x + 3y + 5k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ x = -y - \frac{5}{3}k \end{cases}$$

を考える。下式を上式に代入して

$$\left(-y - \frac{5k}{3}\right)^2 + 4y^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 5y^2 + \frac{10k}{3}y + \frac{25}{9}k^2 - 4 = 0$$

となる。この2次方程式の判別式が正のとき直線 $3x + 3y + 5k = 0$ と曲線 C の共有点2つ、0のとき共有点1つ、負のとき共有点なしである。判別式を D_2 として

$$\frac{D_2}{4} = \left(\frac{5k}{3}\right)^2 - 5\left(\frac{25}{9}k^2 - 4\right)$$

$$= \frac{100}{9} \left(\frac{3\sqrt{5}}{5} - k \right) \left(\frac{3\sqrt{5}}{5} + k \right)$$

である。よって共有点の数は

$$\begin{cases} 2 \left(-\frac{3\sqrt{5}}{5} < k < \frac{3\sqrt{5}}{5} \right) \\ 1 \left(k = \pm\frac{3\sqrt{5}}{5} \right) \\ 0 \left(k < -\frac{3\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{5}}{5} < k \right) \end{cases}$$

となる。よって $k = \pm \frac{3\sqrt{5}}{5}$ のとき、1つの共有点が共通していることに注意して、求める共有

点の数は、

$$\begin{cases} 0 \left(|k| > \sqrt{5} \right) \\ 1 \left(k = \pm\sqrt{5} \right) \\ 2 \left(\frac{3\sqrt{5}}{5} \leq |k| < \sqrt{5} \right) \\ 4 \left(|k| < \frac{3\sqrt{5}}{5} \right) \end{cases}$$

となる。よって共有点が1個となるのは $k = \pm\sqrt{5}$ のときである。

(3)

(2)より、共有点が4個となるのは、 $-\frac{3\sqrt{5}}{5} < k < \frac{3\sqrt{5}}{5}$ のときである。

(1)

数学的帰納法を用いて

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

を示す。

[1] $n=1$ のとき

$$\sum_{k=1}^1 k^3 = 1, \left\{ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) \right\}^2 = 1 \text{ より, } \textcircled{1} \text{ は成立している。}$$

[2] $n=l-1 (l \geq 2)$ のとき $\textcircled{1}$ が成立していると仮定して, $n=l$ のときも $\textcircled{1}$ が成立していることを示す。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^l k^3 &= \sum_{k=1}^{l-1} k^3 + l^3 \\ &= \left\{ \frac{1}{2} l(l-1) \right\}^2 + l^3 \\ &= \frac{1}{4} l^4 - \frac{1}{2} l^3 + \frac{1}{4} l^2 + l^3 \\ &= \frac{1}{4} l^4 + \frac{1}{2} l^3 + \frac{1}{4} l^2 \\ &= \left\{ \frac{1}{2} l(l+1) \right\}^2 \end{aligned}$$

となるため, $n=l$ のときも $\textcircled{1}$ は成立している。

[1], [2] よりすべての自然数 n について $\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$ が成立する。

(証明終)

(2)

$(k+1)^5 - k^5$ を $k=1$ から n まで足し合わせると

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left\{ (k+1)^5 - k^5 \right\} &= \sum_{k=2}^{n+1} k^5 - \sum_{k=1}^n k^5 \\ &= (n+1)^5 - 1 \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left\{ (k+1)^5 - k^5 \right\} &= \sum_{k=1}^n (5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) \\ &= 5 \sum_{k=1}^n k^4 + 10 \sum_{k=1}^n k^3 + 10 \sum_{k=1}^n k^2 + 5 \sum_{k=1}^n k + n \\ &= 5 \sum_{k=1}^n k^4 + 10 \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2 + 10 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + 5 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n \\ &= 5 \sum_{k=1}^n k^4 + (n \text{ の } 4 \text{ 次式}) \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} (n+1)^5 - 1 &= 5 \sum_{k=1}^n k^4 + (n \text{ の } 4 \text{ 次式}) \\ \therefore \sum_{k=1}^n k^4 &= \frac{(n+1)^5 - 1}{5} + (n \text{ の } 4 \text{ 次式}) \end{aligned}$$

より n に関する 5 次式で表されることが示された。

(証明終)

(3)

$\sum_{k=1}^n k^d$ が n の $d+1$ 次式で表されることを数学的帰納法で示す。

[1] $d=1$ のとき

$$\sum_{k=1}^n k^1 = \frac{1}{2} n(n+1) \text{ より成立している。}$$

[2] $n=1, 2, \dots, l-1 (l \geq 2)$ のときに成立していると仮定して, $d=l$ のときも成立することを示す。

二項定理より

$$(k+1)^{l+1} - k^{l+1} = \sum_{r=0}^l {}_{l+1}C_r k^r$$

となる。また

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left\{ (k+1)^{l+1} - k^{l+1} \right\} &= \sum_{k=2}^{n+1} k^{l+1} - \sum_{k=1}^n k^{l+1} \\ &= (n+1)^{l+1} - 1 \end{aligned}$$

となる。さらに

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left\{ (k+1)^{l+1} - k^{l+1} \right\} &= \sum_{k=1}^n \sum_{r=0}^l {}_{l+1}C_r k^r \\ &= \sum_{k=1}^n \left((l+1)k^l + \sum_{r=0}^{l-1} {}_{l+1}C_r k^r \right) \\ &= (l+1) \sum_{k=1}^n k^l + \sum_{r=0}^{l-1} {}_{l+1}C_r \sum_{k=1}^n k^r \\ &= (l+1) \sum_{k=1}^n k^l + \sum_{r=0}^{l-1} {}_{l+1}C_r (n \text{ の } r+1 \text{ 次式}) \\ &= (l+1) \sum_{k=1}^n k^l + (n \text{ の } l \text{ 次式}) \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} (n+1)^{l+1} - 1 &= (l+1) \sum_{k=1}^n k^l + (n \text{ の } l \text{ 次式}) \\ \therefore \sum_{k=1}^n k^l &= \frac{(n+1)^{l+1} - 1}{l+1} + (n \text{ の } l \text{ 次式}) \end{aligned}$$

と書けるため, $\sum_{k=1}^n k^l$ が n の $l+1$ 次式で表される。よって $d=l$ のときも成立している。

[1], [2] よりすべての自然数 d について $\sum_{k=1}^n k^d$ が n に関する $d+1$ 次式で表されることが示された。

(証明終)