

【解答】

(1)	ア	イ		
	12	4284		
(2)	ウ	エ		
	1	2		
(3)	オ	カ	キ	ク
	0	$1-a$	$1+a$	$\sqrt[3]{2}-1$

【解説】

(1)

$2020 = 2^3 \cdot 5 \cdot 101$ より 2020 の約数は全部で

$$(2+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 12 \text{ (個)}$$

あり、それらの和は

$$(1+2+2^2) \cdot (1+5) \cdot (1+101) = 7 \cdot 6 \cdot 102 \\ = 4284$$

である。

(2)

点Eは線分OD上にあるから

$$\overline{OE} = k \overline{OD} \\ = (k, k, k) \quad (0 < k < 1)$$

とおける。また3点A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1)の定める平面の式は $x+y+z=1$ であり、

点Eは3点A, B, Cの定める平面上の点であるから、

$$k+k+k=1$$

$$\therefore k = \frac{1}{3}$$

となる。したがってOE:EDを最も簡単な整数の比で表すと

$$OE:ED = k:(1-k)$$

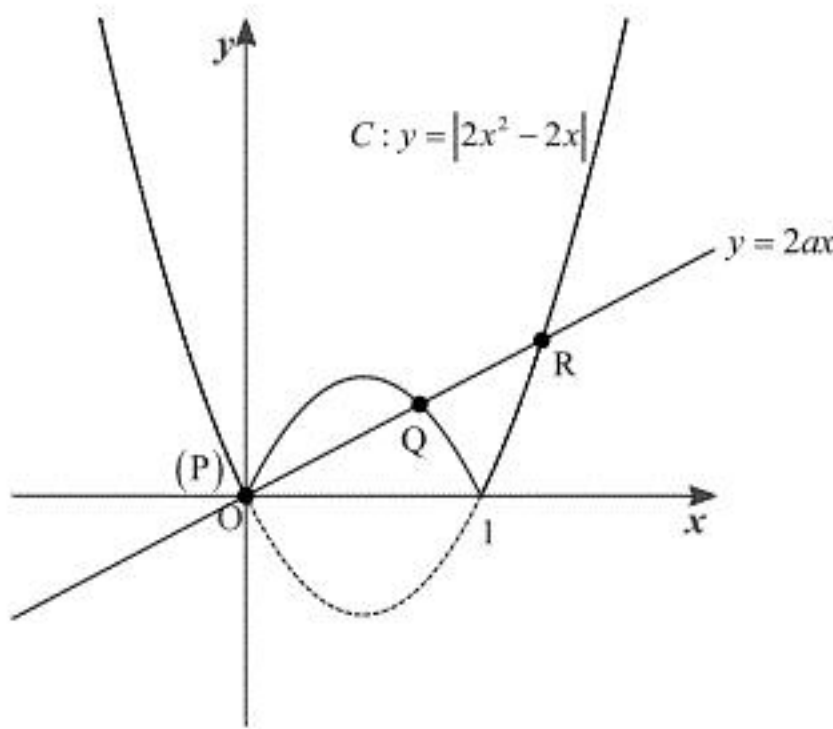
$$= \frac{1}{3} : \frac{2}{3} \\ = 1:2$$

である。

(3)

$$|2x^2 - 2x| = \begin{cases} 2x^2 - 2x & (x < 0, 1 \leq x) \\ -2x^2 + 2x & (0 \leq x < 1) \end{cases}$$

であるから、 $y = |2x^2 - 2x|$ と $y = 2ax$ が異なる3つの共有点をもつとき、次図のようになる。



上図より、点Qは $y = -2x^2 + 2x$ と $y = 2ax$ の交点のうち、 x 座標が $0 < x < 1$ を満たす点であるから、点Qの x 座標は

$$-2x^2 + 2x = 2ax \\ \Leftrightarrow 2x(x-1+a) = 0 \\ \Leftrightarrow x = 1-a \quad (\because x > 0)$$

である。このとき $0 < x < 1$ より a は

$$0 < x < 1 \\ \Leftrightarrow 0 < 1-a < 1 \\ \Leftrightarrow 0 < a < 1$$

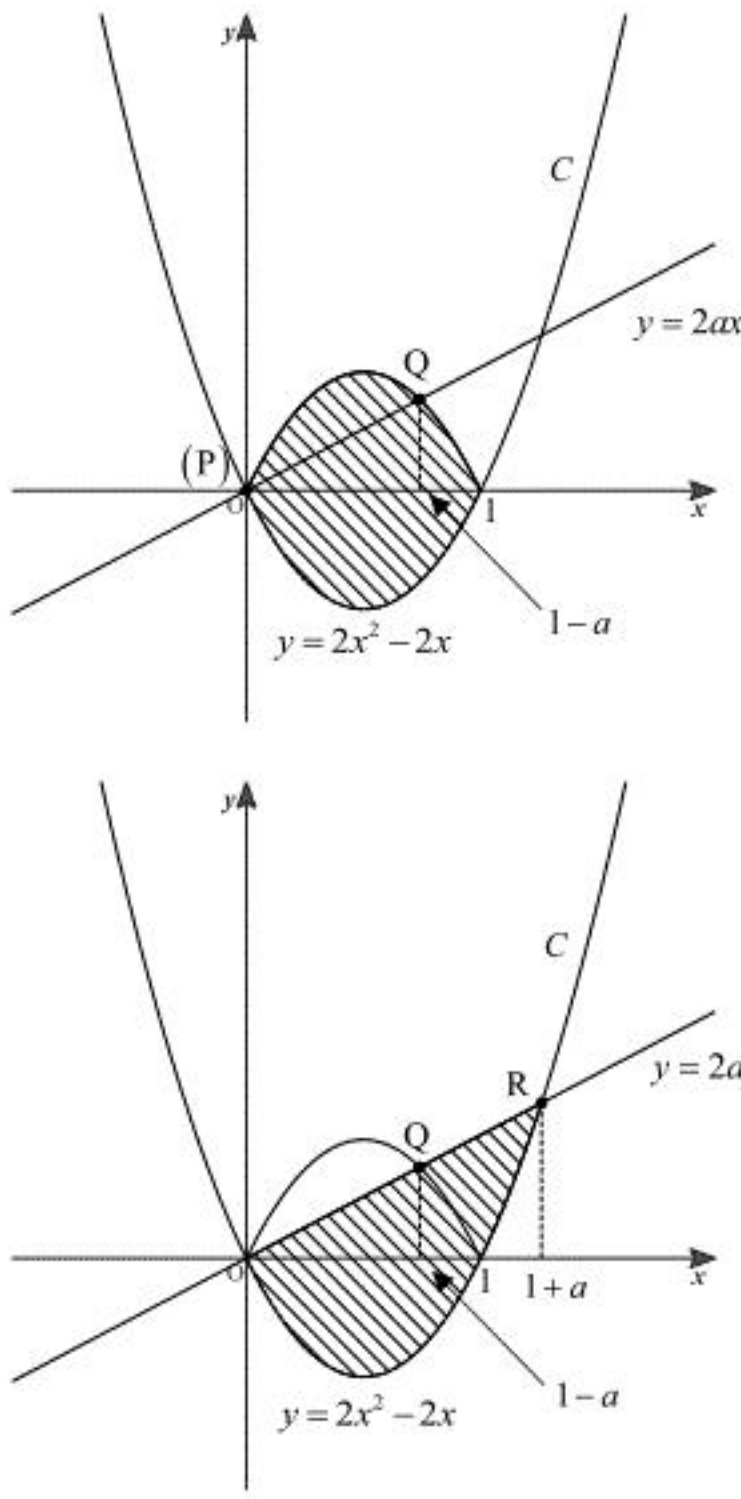
である。また、点Rは $y = 2x^2 - 2x$ と $y = 2ax$ の交点のうち、 x 座標が $x > 1$ を満たす点であるから、点Rの x 座標は

$$2x^2 - 2x = 2ax \\ \Leftrightarrow 2x(x-1-a) = 0 \\ \Leftrightarrow x = 1+a \quad (\because x > 1)$$

である。このとき $x > 1$ より a は

$$x > 1 \\ \Leftrightarrow 1+a > 1 \\ \Leftrightarrow a > 0$$

である。よって3点P, Q, Rの座標はそれぞれ $0, 1-a, 1+a$ であり、 a の範囲は $0 < a < 1$ となる。また曲線Cおよび線分PQで囲まれた部分と、曲線Cおよび線分QRで囲まれた部分の面積が等しくなるとき、下図の2つの斜線部分の面積が等しくなる。



それぞれの図の斜線部分の面積を上から S_1, S_2 とすると、上側の図の斜線部分は x 軸対称であるから、

$$S_1 = S_2 \\ \Leftrightarrow 2 \int_0^1 (-2x^2 + 2x) dx = \int_0^{1+a} \{2ax - (2x^2 - 2x)\} dx \\ \Leftrightarrow (-4) \int_0^1 x(x-1) dx = (-2) \int_0^{1+a} x(x-1-a) dx \\ \Leftrightarrow (-4) \cdot \left(-\frac{1^3 - 0}{6} \right) = (-2) \cdot \left(-\frac{(1+a)^3 - 0}{6} \right) \\ \Leftrightarrow 2 = (1+a)^3 \\ \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{2} - 1$$

となる。このとき $1 < \sqrt[3]{2} < 2$ であるから、 $0 < a < 1$ を満たす。

【解答】

	ケ	コ	サ
(1)	1	$\frac{2}{5}\pi$	2
(2)	②③④		
(3)	a	b	
	⑤	③	
(4)	シ	ス	
	10	2	
(5)	④		

【解説】

(1)

 $z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \ (r_1 > 0, \ 0 \leq \theta_1 < 2\pi)$ とすると、ド・モアブルの定理より

 $z_1^5 = r_1^5 (\cos 5\theta_1 + i \sin 5\theta_1)$ である。よって、 $z_1^5 = 1$ より

$$\begin{cases} r_1^5 = 1 \\ 5\theta_1 = 2k\pi \quad (k \text{ は整数}) \end{cases}$$

となる。 z_1 は虚数かつ偏角が最小のものであるから、 $r_1 = 1$ かつ $k = 1$ 、したがって $\theta_1 = \frac{2}{5}\pi$ と

なる。よって $z_1 = \left(\cos \frac{2}{5}\pi + i \sin \frac{2}{5}\pi \right)$ であり、

$$\begin{aligned} z_1 + \frac{1}{z_1} &= z_1 + z_1^{-1} \\ &= \left(\cos \frac{2}{5}\pi + i \sin \frac{2}{5}\pi \right) + \left\{ \cos \left(-\frac{2}{5}\pi \right) + i \sin \left(-\frac{2}{5}\pi \right) \right\} \\ &= \left(\cos \frac{2}{5}\pi + \cos \frac{2}{5}\pi \right) + i \left(\sin \frac{2}{5}\pi - \sin \frac{2}{5}\pi \right) \\ &= 2 \cos \frac{2}{5}\pi \end{aligned}$$

となる。

(2)

 $z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \ (r_2 > 0, \ 0 \leq \theta_2 < 2\pi)$ とすると、ド・モアブルの定理より

 $z_2^5 = r_2^5 (\cos 5\theta_2 + i \sin 5\theta_2)$ である。よって、 $z_2^5 = -1$ より

$$\begin{cases} r_2^5 = 1 \\ 5\theta_2 = (2l+1)\pi \quad (l \text{ は整数}) \end{cases}$$

となる。 z_2 は虚数かつ偏角が最小のものであるから、 $r_2 = 1$ かつ $l = 0$ 、したがって $\theta_2 = \frac{1}{5}\pi$ と

となる。よって $z_2 = \cos \frac{1}{5}\pi + i \sin \frac{1}{5}\pi$ である。このとき

$$\begin{aligned} z_1^2 - z_2 &= \left(\cos \frac{4}{5}\pi + i \sin \frac{4}{5}\pi \right) - \left(\cos \frac{1}{5}\pi + i \sin \frac{1}{5}\pi \right) \\ &= \left(-\cos \frac{1}{5}\pi - \cos \frac{1}{5}\pi \right) + i \left(\sin \frac{1}{5}\pi - \sin \frac{1}{5}\pi \right) \\ &= -2 \cos \frac{1}{5}\pi \\ z_1^3 + z_2 &= \left(\cos \frac{6}{5}\pi + i \sin \frac{6}{5}\pi \right) + \left(\cos \frac{1}{5}\pi + i \sin \frac{1}{5}\pi \right) \\ &= \left(-\cos \frac{1}{5}\pi + \cos \frac{1}{5}\pi \right) + i \left(-\sin \frac{1}{5}\pi + \sin \frac{1}{5}\pi \right) \\ &= 0 \\ z_1 - z_2^2 &= \left(\cos \frac{2}{5}\pi + i \sin \frac{2}{5}\pi \right) - \left(\cos \frac{2}{5}\pi + i \sin \frac{2}{5}\pi \right) \\ &= 0 \\ z_1^3 z_2^4 &= \left(\cos \frac{6}{5}\pi + i \sin \frac{6}{5}\pi \right) \left(\cos \frac{4}{5}\pi + i \sin \frac{4}{5}\pi \right) \\ &= \cos \frac{6+4}{5}\pi + i \sin \frac{6+4}{5}\pi \\ &= \cos 2\pi + i \sin 2\pi \\ &= 1 \\ z_1^4 - z_2^3 &= \left(\cos \frac{8}{5}\pi + i \sin \frac{8}{5}\pi \right) - \left(\cos \frac{3}{5}\pi + i \sin \frac{3}{5}\pi \right) \\ &= \left(-\cos \frac{3}{5}\pi - \cos \frac{3}{5}\pi \right) + i \left(-\sin \frac{3}{5}\pi - \sin \frac{3}{5}\pi \right) \\ &= -2 \left(\cos \frac{3}{5}\pi + i \sin \frac{3}{5}\pi \right) \end{aligned}$$

となるから、与えられた①～⑤の式のうち正しいものは②③④である。

(3)

$$\begin{aligned} z_1^5 &= 1 \\ \Leftrightarrow (z_1 - 1)(z_1^4 + z_1^3 + z_1^2 + z_1 + 1) &= 0 \\ \therefore z_1^4 + z_1^3 + z_1^2 + z_1 + 1 &= 0 \quad (\because z_1 \neq 1) \end{aligned}$$

であるから、 $z_1 \neq 0$ より上の式の両辺を z_1^2 で割ると

$$\begin{aligned} z_1^2 + z_1 + 1 + \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_1^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(z_1 + \frac{1}{z_1} \right)^2 + \left(z_1 + \frac{1}{z_1} \right) - 1 &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $x_1 = z_1 + \frac{1}{z_1}$ とおくと、 x_1 は 2 次方程式 $x^2 + x - 1 = 0$ の解である。また

$$\begin{aligned} z_2^5 &= -1 \\ \Leftrightarrow (z_2 + 1)(z_2^4 - z_2^3 + z_2^2 - z_2 + 1) &= 0 \\ \therefore z_2^4 - z_2^3 + z_2^2 - z_2 + 1 &= 0 \quad (\because z_2 \neq -1) \end{aligned}$$

であるから、 $z_2 \neq 0$ より上の式の両辺を z_2^2 で割ると

$$\begin{aligned} z_2^2 - z_2 + 1 - \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_2^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(z_2 + \frac{1}{z_2} \right)^2 - \left(z_2 + \frac{1}{z_2} \right) - 1 &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $x_2 = z_2 + \frac{1}{z_2}$ とおくと、 x_2 は 2 次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解である。

(4)

半径 1 の円に内接する正十角形は等辺の長さが 1、頂角が $\frac{1}{5}\pi$ の二等辺三角形 10 個に分割できるから、

$$\begin{aligned} S &= 10 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \frac{1}{5}\pi \right) \\ &= 5 \sin \frac{1}{5}\pi \end{aligned}$$

となる。また (1), (3) より $x_1 = 2 \cos \frac{2}{5}\pi (> 0)$ であるから、 x_1 は 2 次方程式 $x^2 + x - 1 = 0$ の解であ

ることと合わせて、 $\cos \frac{2}{5}\pi = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ となる。よって

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{1}{5}\pi &= \frac{1 - \cos \frac{2}{5}\pi}{2} \\ \Leftrightarrow \sin^2 \frac{1}{5}\pi &= \frac{5 - \sqrt{5}}{8} \\ \therefore \sin \frac{1}{5}\pi &= \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \quad \left(\because \sin \frac{1}{5}\pi > 0 \right) \end{aligned}$$

であるから、 $S = \frac{5}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ と求まる。

(5)

$2.2 < \sqrt{5} < 2.3$ より $5.4 < 10 - 2\sqrt{5} < 5.6$ となるから、

$$\begin{aligned} \frac{25}{16} \cdot \frac{27}{5} < S^2 &= \frac{25}{16} (10 - 2\sqrt{5}) < \frac{25}{16} \cdot \frac{28}{5} \\ \Leftrightarrow 8.41 = 2.9^2 < \frac{135}{16} < S^2 < \frac{35}{4} < 9 = 3^2 \\ \therefore 2.9 < S < 3 \end{aligned}$$

である。

【解答】

(1)	セ	ソ	タ	
	1	1	65536	
(2)	a	b	c	d
	③	④	④	⑤
(3)	チ	ツ		
	$\frac{1}{e^e}$	e		

【解説】

(1)

$a=1$ のとき常に $f(x)=1$ となるから、 $a_4=f(a_3)=1$ であり、また $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n=1$ である。 $a=2$ のとき、

$$\begin{aligned} a_2 &= f(a_1) \\ &= 2^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= f(a_2) \\ &= 2^4 \\ &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= f(a_3) \\ &= 2^{16} \\ &= 65536 \end{aligned}$$

となる。

(2)

点 P_1, P_3 は $y=x$ 上にあり、点 P_2, P_4 は $y=a^x$ 上にある。点 P_1, P_2 の x 座標は a_n であるから、 y 座標はそれぞれ $a_n, a^{a_n}=a_{n+1}$ となる。このとき点 P_3 の y 座標も a_{n+1} であるから、 x 座標は a_{n+1} となる。また、このとき点 P_4 の x 座標は a_{n+1} であるから、 y 座標は $a^{a_{n+1}}=a_{n+2}$ となる。以上より、 $P_1(a_n, a_n), P_2(a_n, a_{n+1}), P_3(a_{n+1}, a_{n+1}), P_4(a_{n+1}, a_{n+2})$ である。

(3)

曲線 C と直線 l が接するとき、接点の x 座標を t とすると、 $f'(x)=a^x \log a$ より、接点の y 座標と接線の傾きについて

$$\begin{aligned} &\begin{cases} t=a' \\ 1=a' \log a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \log t = \log a' \quad (\because a' > 0) \\ \log a = \frac{1}{a'} \quad (\because a' > 0) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \log t = t \log a \\ \log a = \frac{1}{t} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \log t = 1 \\ a = e^{\frac{1}{t}} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = e \\ a = e^{\frac{1}{e}} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。次に a_n の極限を考える。まず、数学的帰納法を用いて、すべての自然数 n について $a_n < e \cdots \textcircled{1}$ であることを示す。

[1] $n=1$ のとき、

$$\begin{aligned} a_1 &= a \\ &= \frac{1}{e} \\ &< e \end{aligned}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ が成り立つ。

[2] $n=k$ のとき $\textcircled{1}$ が成り立つ、すなわち $a_k < e$ であると仮定すると、 $n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= f(a_k) \\ &= e^{\frac{a_k}{e}} \\ &< e^1 \left(\because a_k < e \Leftrightarrow \frac{a_k}{e} < 1 \right) \\ &= e \end{aligned}$$

となり、 $\textcircled{1}$ が成り立つ。

以上[1],[2]より、すべての自然数 n について $a_n < e$ が成り立つ。ここで平均値の定理より、すべての自然数 n について

$$\begin{aligned} \frac{f(a_n) - f(e)}{a_n - e} &= f'(c_n) \quad (a_n < c_n < e) \\ \Leftrightarrow \frac{a_{n+1} - e}{a_n - e} &= f'(c_n) \quad (\because a_{n+1} = f(a_n), e = f(e)) \end{aligned}$$

となる c_n が少なくとも1つ存在する。このとき、 $f'(x)=a^x \log a = e^{\frac{x-e}{e}}$ より、

$$\begin{aligned} f'(c_n) &= e^{\frac{c_n - e}{e}} \\ &< e^0 \quad (\because c_n < e) \end{aligned}$$

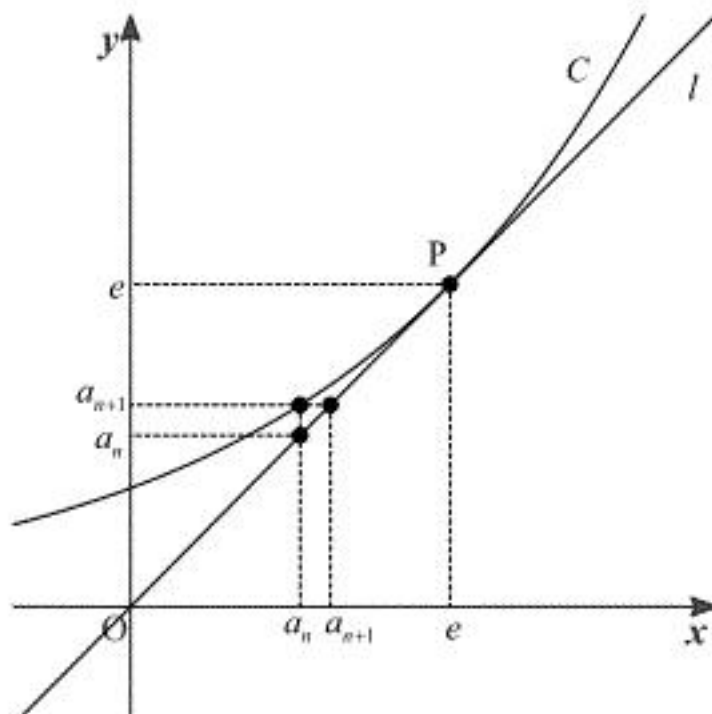
であるから、 $0 < f'(c_n) < 1$ となる。したがって

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{a_{n+1} - e}{a_n - e} < 1 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - e &> a_n - e \quad (\because a_n < e) \\ \Leftrightarrow a_n &< a_{n+1} < e \end{aligned}$$

である。平均値の定理の結果より $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots < e$ となることから、 $\{a_n\}$ は無限大に発散も振動もせず、 $n \rightarrow \infty$ のとき極限值をもつ。極限值を α とすると、 α は $\alpha = f(\alpha)$ を満

たし、すなわち $x = f(x) (0 \leq x \leq e)$ の解である。ここで、 $f''(x) = \frac{1}{e} e^{\frac{x-e}{e}}$ より、常に $f''(x) > 0$

が成立するので、曲線 C は下に凸の曲線である。よって、曲線 C と直線 l は次図のようになる。



$x = f(x)$ の解は曲線 C と直線 l の共有点の x 座標であり、上図より $0 \leq x \leq e$ に $x = f(x)$ の

解は $x=e$ のみしか存在しないから、極限值は e である。よって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$ と求まる。

4 p は素数とし、整数 a を p で割った余りを $\overline{a}$ で表す。

以下の設問(1)の テ、ト にあてはまる適切な数と設問(2)～(5)に対する解答を

解答用紙の所定の欄に答えよ。

(1) $p = 7$ とする。このとき $\overline{2020} = \text{テ}$ 、 $\overline{-100} = \text{ト}$ である。

(2) $p = 7$ とする。 a, b はそれぞれ $1 \leq a \leq 6$, $1 \leq b \leq 6$ を満たす整数とする。

下の表で、 a 行 b 列の欄に $\overline{ab}$ を記入することによってすべての空欄を埋めるとき、
(a), (b), (c)に入る数の組み合わせを下の①～⑧から選び、その番号を答えよ。

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3			
2	2	4		1		5
3	3	6	2	5		
4				(a)	6	
5		3	1		(b)	(c)
6			4	3		1

- | | |
|---------------------|---------------------|
| ① (a) 1 (b) 2 (c) 2 | ⑤ (a) 2 (b) 2 (c) 2 |
| ② (a) 1 (b) 2 (c) 4 | ⑥ (a) 2 (b) 2 (c) 4 |
| ③ (a) 1 (b) 4 (c) 2 | ⑦ (a) 2 (b) 4 (c) 2 |
| ④ (a) 1 (b) 4 (c) 4 | ⑧ (a) 2 (b) 4 (c) 4 |

(3) p は素数とする。どんな整数 a, b についても $\overline{ab} = \overline{\overline{a}b}$ であることを示せ。

(4) p は素数とする。 $\overline{a} \neq 0$ ならば、ある整数 b を選んで $\overline{ab} = 1$ とできることを示せ。

(5) a は整数で7の倍数ではないとする。このとき $a^6 - 1$ は7の倍数であることを示せ。