

【解答】

	ア	イ	ウ
(1)	$-a$	$1-(-a)^n$	1
	エ	オ	
(2)	2	1010	

【解説】

(1)

$f_n(a)$ は初項1, 公比 $-a$ の等比数列の和であるから,

$$\begin{aligned} f_n(a) &= \frac{1-(-a)^n}{1-(-a)} \\ &= \frac{1-(-a)^n}{1+a} \end{aligned}$$

である。また $|a| < 1$ のとき

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-(-a)^n}{1+a} \\ &= \frac{1}{1+a} \end{aligned}$$

となる。

(2)

自然数 m を用いて, $\sqrt{n^2+2021}=m$ とおける。このとき両辺を2乗して整理すると

$$\begin{aligned} n^2+2021 &= m^2 \\ \Leftrightarrow m^2-n^2 &= 2021 \\ \Leftrightarrow (m-n)(m+n) &= 1 \cdot 2021 = 43 \cdot 47 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。いま m, n は共に自然数であり, さらに $m > n$ であるから $m-n, m+n$ は共に自然数である。また $n > 0$ であるから $m+n > m-n$ である。さらに2021を2つの自然数の積の形に書く方法は, 43, 47が共に素数であるので, 順序変更を除けば上の2通りしかない。したがって, ①を満たす $(m-n, m+n)$ の組は $(m-n, m+n) = (1, 2021), (43, 47)$ である。よって①を満たす (n, m) の組は $(n, m) = (2, 45), (1010, 1011)$ であるから, 求める n は $n = 2, 1010$ である。

【解答】

	力	キ	ク	ケ
(1)	$x^2(2x+3)$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{12}$
	コ	サ	シ	
(2)	$-bx-b+2$	$-\frac{5}{8}$	1	
	ス	セ	ソ	
(3)	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{5}$	

【解説】

(1)

$h(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{1+x}$ となるから、

$$\begin{aligned} h'(x) &= -1 + 2x + \frac{1}{(1+x)^2} \\ &= \frac{(2x-1)(x^2+2x+1)+1}{(1+x)^2} \\ &= \frac{x^2(2x+3)}{(1+x^2)} \end{aligned}$$

である。よって $h'(x) = 0$ の解は $x = 0, -\frac{3}{2}$ である。 $x > 0$ において $h'(x)$ の分母である $1+x^2$ は正であり、また分子である $x^2(2x+3)$ も $x^2, 2x+3$ が共に正であるので正である。これらより $h'(x) > 0$ であるから、 $x > 0$ において $h(x) > h(0) = 0$ である。また

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} g(x) dx &= \left[x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

である。

(2)

$b = \frac{1}{1+a}$ より、 $a = \frac{1}{b} - 1$ である。また $f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ であるから、 $y = f(x)$ の $x = a$ における

接線の方程式は

$$\begin{aligned} y - \frac{1}{1+a} &= -\frac{1}{(1+a)^2}(x-a) \\ \Leftrightarrow y - b &= -b^2\left(x - \frac{1}{b} + 1\right) \\ \therefore y &= b(-bx - b + 2) \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} b(-bx - b + 2) dx &= b \left[-\frac{b}{2}x^2 + (2-b)x \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{b^2}{8} + \frac{2b-b^2}{2} \\ &= b \left(-\frac{5}{8}b + 1 \right) \end{aligned}$$

である。

(3)

$b = \frac{1}{1+a}$ であるから

$$0 \leq a \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 1+a \leq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq b = \frac{1}{1+a} \leq 1$$

である。また

$$b \left(-\frac{5}{8}b + 1 \right) = -\frac{5}{8} \left(b - \frac{4}{5} \right)^2 + \frac{2}{5}$$

であり、 $\frac{2}{3} < \frac{4}{5} < 1$ より b は $\frac{4}{5}$ をとることができるから、 $b \left(-\frac{5}{8}b + 1 \right)$ は $b = \frac{4}{5}$ のとき最大値 $\frac{2}{5}$ をとる。

(1)

生徒の人数は10人だから

$$1+1+a+b+c+d+a=10$$

$$\Leftrightarrow 2a+b+c+d=8 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。また平均点が75点であることから

$$\frac{40 \cdot 1 + 50 \cdot 1 + 60 \cdot a + 70 \cdot b + 80 \cdot c + 90 \cdot d + 100 \cdot a}{10} = 75$$

$$\Leftrightarrow 16a + 7b + 8c + 9d = 66 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。ここで、 b, c を a, d を用いて表すことを考える。 $\textcircled{2} - 8 \times \textcircled{1}$ より、

$$-b + d = 2$$

$$\therefore b = d - 2 \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。またこれを $\textcircled{2}$ に代入して、

$$c = 10 - 2a - 2d \quad \cdots \textcircled{4}$$

となる。いま、 $a=2$ のときを考えると、 $\textcircled{4}$ は

$$c = 6 - 2d$$

となる。いま $b \geq 0$ 、 $c \geq 0$ であるから、 $2 \leq d \leq 3$ である。 d は整数であるので、 $d=2, 3$ である。そして d がどちらの場合でも、 b, c は0以上の整数であるという条件を満たす。

(答) $d=2, 3$

(2)

分散を V とすると

$$V = \frac{1}{10} \{ (40-75)^2 + (50-75)^2 + (60-75)^2 \cdot a + (70-75)^2 \cdot b + (80-75)^2 \cdot c + (90-75)^2 \cdot d + (100-75)^2 \cdot a \}$$

$$= \frac{5}{2} (34a + b + c + 9d + 74)$$

$$= \frac{5}{2} (34a + d - 2 + 10 - 2a - 2d + 9d + 74)$$

$$= 5(16a + 4d + 41)$$

となる。 a によって d の範囲を定めることを考える。 $\textcircled{3}$ より、 $d \geq 2$ であり、 $\textcircled{4}$ より $d \leq 5-a$ である。したがって d が存在するのは $a \leq 3$ のときであり、このとき $2 \leq d \leq 5-a$ となる。さて、分散を最大にするには、上式より $16a+4d$ を最大にすればよい。 a を固定して考えると、 $d=5-a$ となるとき分散は最大になる。これを代入すると、 $12a+20$ を最大にすればよいことが分かる。よって $a=3$ とすればよい。このとき $d=2$ であり、 $\textcircled{3}$ と $\textcircled{4}$ から $b=0$ 、 $c=0$ とわかる。したがって a, b, c, d が0以上の整数であるという条件を満たし、これが答えである。

(3)

V が最小値をとるには $16a+4d$ を最小にすればよい。 $2 \leq d \leq 5-a$ から、 a を固定したとき $d=2$ とすればよい。このとき $16a+8$ を最小にすればよい。 $a=0$ とするとこれが最小になる。このとき $\textcircled{3}$ と $\textcircled{4}$ から $b=0$ 、 $c=6$ となり、 a, b, c, d が0以上の整数であるという条件を満たし、これが答えであると分かる。

(答) $(a, b, c, d) = (0, 0, 6, 2)$