

【解答】

(1) ア	2	(1) イ	506	(2) ウ	7	(2) エ	6	(2) オ	$\frac{1}{8}$
(3) カ	316	(3) キ	142						

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}
 (a+b)^2 &= (x+\sqrt{2x-1})+(x-\sqrt{2x-1})+2\sqrt{(x+\sqrt{2x-1})(x-\sqrt{2x-1})} \\
 &= 2x+2\sqrt{x^2-2x+1} \\
 &= 2x+2|x-1|
 \end{aligned}$$

となるから、 $a+b>0$ より、

$$a+b=\sqrt{2x+2|x-1|}$$

である。また、 $a+b=\sqrt{2022}$ のとき、

$$x+|x-1|=1011 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。 $x<1$ のとき、

$$(\textcircled{1} \text{の左辺})=x+(1-x)=1$$

となるから、不適である。また、 $x\geq 1$ のとき、

$$(\textcircled{1} \text{の左辺})=1011$$

$$x+(x-1)=1011$$

$$\Leftrightarrow 2x-1=1011$$

$$\therefore x=506$$

となり、この解は $x\geq 1$ を満たす。以上から、 $a+b=\sqrt{2022}$ となるのは、 $x=506$ のときである。

(2)

集団の中の1人が感染している事象をA、陽性と判定される事象をBとすると、陽性と判定された人が実際に感染している条件付き確率 $P_B(A)$ は、

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

と表される。ここで、 $P(A\cap B)=0.7p$ 、 $P(B)=0.7p+0.1(1-p)$ であるから、

$$\begin{aligned}
 P_B(A) &= \frac{0.7p}{0.7p+0.1(1-p)} \\
 &= \frac{7p}{1+6p}
 \end{aligned}$$

となる。また、 $P_B(A)=0.5$ であるとき、 $p\geq 0$ より $1+6p>0$ であることから、

$$\begin{aligned}
 \frac{7p}{1+6p} &= 0.5 \\
 \Leftrightarrow 14p &= 1+6p \\
 \therefore p &= \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

となる。

(3)

$\log_{10}(10x^2)$ の整数部分が5であることより、

$$5 \leq \log(10x^2) < 6$$

$$\Leftrightarrow 10^5 \leq 10x^2 < 10^6$$

$$\Leftrightarrow 10^4 \leq x^2 < 10^5$$

$$\therefore 10^2 \leq x < 10^2\sqrt{10}$$

となる。 $\sqrt{10}=3.162$ より、

$$100 \leq x < 316.2$$

となり、これを満たす最大の自然数 x は316である。また、同様に $\log_{10}(5x^2)=c$ の整数部分が5であることより、

$$5 \leq \log(5x^2) < 6$$

$$\Leftrightarrow 10^5 \leq 5x^2 < 10^6$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 10^4 \leq x^2 < 2 \cdot 10^5$$

$$\therefore 100\sqrt{2} \leq x < 200\sqrt{5}$$

となる。 $\sqrt{2}=1.414$ を代入すると、

$$141.4 \leq x^2 < 282.8$$

となる。したがって、最小の自然数 x は142である。

〔解答〕

(1) ク	$\frac{\pi}{2}$	(2) ケ	2	(2) コ	2	(3) サ	$\frac{5}{6}$	(4) シ	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
----------	-----------------	----------	---	----------	---	----------	---------------	----------	----------------------

〔解説〕

(1)

$\overrightarrow{AB} = (a, -a, 0)$, $\overrightarrow{OC} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ であるから,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = (a, -a, 0) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = 0$$

である。ここで、 $a \neq 0$ より $|\overrightarrow{AB}| \neq 0$, $|\overrightarrow{OC}| \neq 0$ であるから、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ である。

(2)

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}|^2 &= a^2 + (-a)^2 + 0^2 \\ &= 2a^2 \end{aligned}$$

である。また、 $\overrightarrow{AC} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right)$ であるから,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (a, -a, 0) \cdot \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right) = 2a$$

である。

(3)

$\triangle OBC$ の面積を S_1 とおくと,

$$S_1 = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2 |\overrightarrow{OC}|^2 - (\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC})^2}$$

と表せる。このとき,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OB}|^2 &= a^2 + (2-a)^2 = 2a^2 - 4a + 4 \\ |\overrightarrow{OC}|^2 &= \frac{3}{2} \\ \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} &= (a, 2-a, 0) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) = 1 \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2} (2a^2 - 4a + 4) - 1} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{3a^2 - 6a + 5} \end{aligned}$$

である。また、 $\triangle ABC$ の面積を S_2 とおくと,

$$S_2 = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$$

と表せる。このとき,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}|^2 &= 2a^2 \\ |\overrightarrow{AC}|^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 1 = \frac{7}{2} \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= 2a \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 \cdot \frac{7}{2} - 4a^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{3a^2} \end{aligned}$$

である。ここで、 $S_1 = S_2$ のとき,

$$\begin{aligned} 3a^2 - 6a + 5 &= 3a^2 \\ \therefore a &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

となる。

(4)

点 P, Q はそれぞれ直線 AB, OC 上にあるから、 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ は実数 s, t を用いて

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{OQ} = s\overrightarrow{OC} \end{cases}$$

とおくことができる。このとき,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= s\overrightarrow{OC} - t\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OA} \end{aligned}$$

となるから,

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 = s^2 |\overrightarrow{OC}|^2 + t^2 |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{OA}|^2 - 2st \cdot \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} + 2t \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA} - 2s \cdot \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$$

となる。ここで、 $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \cdot (0, 2, 0) = 1$ であり、他の値についても(1)~(3)の結果を用いれば,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}|^2 &= \frac{3}{2} s^2 + 2a^2 t^2 + 4 - 4at - 2s \\ &= \frac{3}{2} \left(s - \frac{2}{3}\right)^2 + 2a^2 \left(t - \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $|\overrightarrow{PQ}|$ の最小値は、 $s = \frac{2}{3}$, $t = \frac{1}{a}$ のとき、 $\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ である。

【解答】

(1)	$f^{-1}(x) = \sqrt{1-x}$								
(2) ス	(c)	(3) セ	11	(3) ソ	5	(4) タ	58	(4) チ	25

【解説】

(1)

 $y = -x^2 + 1$ について、

$$y = -x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 - y$$

$$\therefore x = \sqrt{1-y} \quad (\because x \geq 0)$$

となる。また、 $f(x)$ の値域は $f(x) \leq 1$ だから、逆関数は、

$$f^{-1}(x) = \sqrt{1-x} \quad (x \leq 1)$$

である。

(2)

 $f(x)$ の定義域は $x \geq 0$ で、 $f^{-1}(x)$ の定義域は $x \leq 1$ であるから、 $y = f(x)$ と $y = f^{-1}(x)$ の共有点の x 座標を考えると、 $0 \leq x \leq 1$ を考えるだけでよい。このとき、共有点の x 座標は、

$$-x^2 + 1 = \sqrt{1-x}$$

の両辺を 2 乗して、

$$(-x^2 + 1)^2 = 1 - x$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = 1 - x$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^3 - 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2+x-1) = 0$$

となる。 $x^2 + x - 1 = 0$ を解くと、 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ となる。ここで、 $0 \leq x \leq 1$ であるから、 $y = f(x)$ と $y = f^{-1}(x)$ の共有点の x 座標は、

$$x = 0, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, 1$$

である。

(3)

 $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ とおくと、

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = 1 - \alpha$$

$$\therefore \alpha = \sqrt{1 - \alpha}$$

であるから、 $f(\alpha) = f^{-1}(\alpha) = \alpha$ である。このとき、 $0 \leq x \leq 1$ において、 $x(x-1) \leq 0$ 、 $f(x) \geq 0$ 、 $f^{-1}(x) \geq 0$ であるから

$$f(x) \geq f^{-1}(x)$$

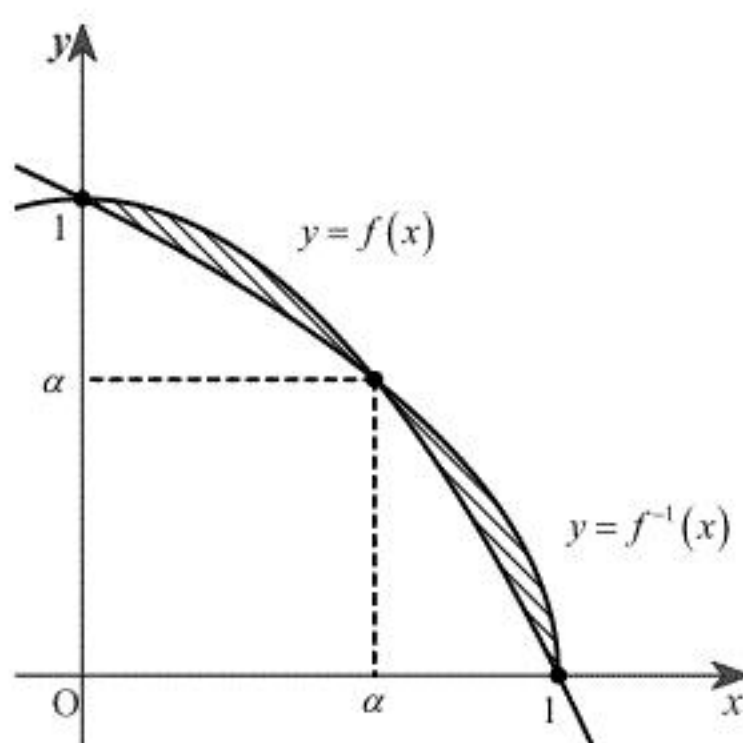
$$\Leftrightarrow -x^2 + 1 \geq \sqrt{1-x}$$

$$\Leftrightarrow (-x^2 + 1)^2 \geq 1 - x$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2+x-1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \alpha$$

となる。よって、 $y = f(x)$ と $y = f^{-1}(x)$ を図示すると、以下のようになる。求める面積 S は図の斜線部分であるから、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\alpha \{f(x) - f^{-1}(x)\} dx + \int_\alpha^1 \{f^{-1}(x) - f(x)\} dx \\ &= \int_0^\alpha (-x^2 + 1 - \sqrt{1-x}) dx + \int_\alpha^1 (\sqrt{1-x} + x^2 - 1) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x + \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^\alpha + \left[-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}x^3 - x \right]_\alpha^1 \\ &= -\frac{2}{3}\alpha^3 + 2\alpha + \frac{4}{3}(1-\alpha)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\alpha = \sqrt{1-\alpha}$ であるから、

$$\begin{aligned} S &= -\frac{2}{3}\alpha^3 + 2\alpha + \frac{4}{3}\alpha^3 - \frac{4}{3} \\ &= \frac{2}{3}(\alpha^3 + 3\alpha - 2) \\ &= \frac{2}{3}\{(\alpha^2 + \alpha - 1)(\alpha - 1) + 5\alpha - 3\} \end{aligned}$$

である。 $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$ であるから、

$$\begin{aligned} S &= \frac{2}{3}(5\alpha - 3) \\ &= \frac{2}{3}\left(5 \cdot \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} - 3\right) \\ &= \frac{-11 + 5\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

である。

(4)

(3)の図より、求める体積 V は、

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\alpha \pi \left\{ (-x^2 + 1)^2 - (\sqrt{1-x})^2 \right\} dx + \int_\alpha^1 \pi \left\{ (\sqrt{1-x})^2 - (-x^2 + 1)^2 \right\} dx \\ &= \int_0^\alpha \pi (x^4 - 2x^2 + x) dx + \int_\alpha^1 \pi (-x^4 + 2x^2 - x) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^\alpha + \pi \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_\alpha^1 \\ &= \pi \left(\frac{2}{5}\alpha^5 - \frac{4}{3}\alpha^3 + \alpha^2 - \frac{1}{5} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{30} (12\alpha^5 - 40\alpha^3 + 30\alpha^2 - 1) \\ &= \frac{\pi}{30} \{ (\alpha^2 + \alpha - 1)(12\alpha^3 - 12\alpha^2 - 16\alpha + 34) - 50\alpha + 33 \} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$ であるから、

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{30} (-50\alpha + 33) \\ &= \frac{\pi}{30} \left(-50 \cdot \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + 33 \right) \\ &= \frac{58 - 25\sqrt{5}}{30} \pi \end{aligned}$$

である。

【解答】

(1)	$\frac{7}{12}$	(2)	7
-----	----------------	-----	---

(3)

$$\begin{aligned}
 S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\
 &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2n} \\
 &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \\
 &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\
 &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}
 \end{aligned}$$

である。

(証明終)

(4)

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\
 &= \left[\log|1+x| \right]_0^1 \\
 &= \log 2 \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \right) \\
 &= \log 2
 \end{aligned}$$

である。したがって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \log 2$ である。(答) $\log 2$

【解説】

(1)

$$S_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

である。

(2)

 $n = 2k$ のとき、

$$\begin{aligned}
 S_{2k+1} &= S_{2k} + \frac{1}{2k+1} \\
 S_{2k+2} &= S_{2k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \\
 &= S_{2k} + \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}
 \end{aligned}$$

である。ここで、 $k \geq 1$ より $1 < 2k+1 < 2k+2$ であるから、

$$0 < \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} < \frac{1}{2k+1}$$

となる。よって、 $S_{2k} < S_{2k+2} < S_{2k+1}$ である。また、 $n = 2k+1$ のとき、

$$\begin{aligned}
 S_{2k+2} &= S_{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \\
 S_{2k+3} &= S_{2k+1} - \frac{1}{2k+2} + \frac{1}{2k+3} \\
 &= S_{2k+1} - \frac{1}{(2k+2)(2k+3)}
 \end{aligned}$$

であるから、同様にして $S_{2k+2} < S_{2k+3} < S_{2k+1}$ となる。以上より、 $S_{2k} < S_{2k+2} < S_{2k+3} < S_{2k+1}$ となるから、

$$\begin{cases} S_{8m} < S_{8m+2} < S_{8m+3} < S_{8m+1} \\ S_{8m+2} < S_{8m+4} < S_{8m+5} < S_{8m+3} \\ S_{8m+4} < S_{8m+6} < S_{8m+7} < S_{8m+5} \end{cases}$$

が成り立つ。したがって、

$$S_{8m} < S_{8m+2} < S_{8m+4} < S_{8m+6} < S_{8m+7} < S_{8m+5} < S_{8m+3} < S_{8m+1}$$

となるから、5番目に小さいものは S_{8m+7} である。よって、これを S_{8m+a} の形で表すとき、 $a=7$ である。