

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ
	$-\frac{88}{3}$	1	-1
(2)	エ	オ	
	$\pi^2 + 4$	$\log 2$	

〔解説〕

(1)

$3^x + 3^{-x} = t$ とおく。 $3^x, 3^{-x} > 0$ より相加相乗平均の関係から $t \geq 2\sqrt{3^x \cdot 3^{-x}} = 2$ が成り立つ。

等号は $3^x = 3^{-x}$ より、 $x = 0$ で成り立つ。 $(3^x + 3^{-x})^2 = 3^{2x} + 3^{-2x} + 2$ より、

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 3^{2x+1} + 3^{-2x+1} - 20(3^x + 3^{-x}) + 10 \\
 &= 3(t^2 - 2) - 20t + 10 \\
 &= 3t^2 - 20t + 4 \\
 &= 3\left(t - \frac{10}{3}\right)^2 - \frac{88}{3}
 \end{aligned}$$

となる。 $t \geq 2$ より、関数 $f(x)$ は $t = \frac{10}{3}$ のとき最小値 $-\frac{88}{3}$ をとる。このとき、 x は、

$$\begin{aligned}
 3^x + 3^{-x} &= \frac{10}{3} \\
 \Leftrightarrow 3^{2x} - \frac{10}{3} \cdot 3^x + 1 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (3^x - 3)\left(3^x - \frac{1}{3}\right) &= 0 \\
 \therefore 3^x &= 3, \frac{1}{3} \\
 \therefore x &= 1, -1
 \end{aligned}$$

をとる。

(2)

点 P の速さを v とすると、

$$\begin{aligned}
 v &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\left\{-e^{-t}\left(\cos \frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi t}{2}\right)\right\}^2 + \left\{e^{-t}\left(-\sin \frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi t}{2}\right)\right\}^2} \\
 &= e^{-t} \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + 1} \\
 &= \frac{e^{-t}}{2} \sqrt{\pi^2 + 4}
 \end{aligned}$$

となる。また、点 P が時刻 $t = 0$ から $t = s$ までの間に動く道のりが $\frac{\sqrt{\pi^2 + 4}}{4}$ であるとき、

$$\begin{aligned}
 \int_0^s v dt &= \frac{\sqrt{\pi^2 + 4}}{4} \\
 \Leftrightarrow \int_0^s \frac{e^{-t}}{2} \sqrt{\pi^2 + 4} dt &= \frac{\sqrt{\pi^2 + 4}}{4} \\
 \Leftrightarrow \int_0^s e^{-t} dt &= \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow [-e^{-t}]_0^s &= \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow 1 - e^{-s} &= \frac{1}{2} \\
 \therefore s &= \log 2
 \end{aligned}$$

である。

【解答】

カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ
0	9	5	1	0	5	4	8	5	0
タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ
4	9	5	1	4	9	5	0	0	7
ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ	ミ	ム	メ	
2	4	5	1	7	1	6	1	7	

【解説】

$\log_{10} 2.0$ の小数第 5 位を四捨五入すると 0.3010 となるため、正確な値は $0.30095 \leq \log_{10} 2.0 < 0.30105$ の範囲に存在する。 $0.11385 \leq \log_{10} 1.3 < 0.11395$ と辺々足し合わせて、

$$\begin{aligned} 0.30095 + 0.11385 &\leq \log_{10} 2.0 + \log_{10} 1.3 < 0.30105 + 0.11395 \\ \Leftrightarrow 0.4148 &\leq \log_{10} 2.6 < 0.4150 \end{aligned}$$

が成り立つ。また、同様に $0.71595 \leq \log_{10} 5.2 < 0.71605$ が成立するため、

$$\begin{aligned} 0.71595 - 0.30105 &< \log_{10} 5.2 - \log_{10} 2.0 < 0.71605 - 0.30095 \\ \Leftrightarrow 0.4149 &< \log_{10} 2.6 < 0.4151 \end{aligned}$$

となる。 $\log_{10} 2.6$ の正確な値はこれらの共通部分に存在するため、 $0.4149 < \log_{10} 2.6 < 0.4150$ である。以下、合同式の法を 100 として考える。 $7^4 = 2401 \equiv 1$ が成立するため、

$$\begin{aligned} 7^{17^2} &= 7^{289} \\ &= 7 \cdot (7^4)^{72} \\ &\equiv 7 \cdot 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

である。したがって 7^{17^2} の下 2 桁は 07 となる。ここで、 $\log_{10} 7^{17^2} = 244.2339$ として、

$$\begin{aligned} 244 + 0.2304 &\leq \log_{10} 7^{17^2} < 244 + 0.2553 \\ \Leftrightarrow 244 + \log_{10} 1.7 &\leq \log_{10} 7^{17^2} < 244 + \log_{10} 1.8 \\ \therefore 1.7 \cdot 10^{244} &\leq 7^{17^2} < 1.8 \cdot 10^{244} \end{aligned}$$

が成り立つため、 7^{17^2} は 245 桁の整数で、上 2 桁は 17 となる。一方、 $\log_{10} 7^{17^2}$ の正確な値が

$244.21945 \leq \log_{10} 7^{17^2} < 244.24835$ の範囲に存在することを利用すると

$244 + \log_{10} 1.6 < 244.21945$, $244 + \log_{10} 1.7 < 244.24835$ が成り立つ。これより

$244 + \log_{10} 1.6 \leq \log_{10} 7^{17^2} < 244 + \log_{10} 1.7$ も成立し得るため、 7^{17^2} の上 2 桁は 16 または 17 とな

る。ここで、 $\log_{10} 7.0 = 0.845098 \dots$ であるとき、

$$\begin{aligned} 289 \cdot 0.845098 &\leq \log_{10} 7^{17^2} < 289 \cdot 0.845099 \\ \Leftrightarrow 244.233322 &\leq \log_{10} 7^{17^2} < 244.233611 \\ \therefore 244 + \log_{10} 1.7 &\leq \log_{10} 7^{17^2} < 244 + \log_{10} 1.8 \end{aligned}$$

が言えるため、結局 7^{17^2} の上 2 桁は 17 となる。

【解答】

(1)	$\boxed{\text{モ}}$	$\boxed{\text{ヤ}}$	$\boxed{\text{ユ}}$	
	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{3}{4}\pi$	
(2)	$\boxed{\exists}$	$\boxed{\overline{\text{ラ}}}$		
	ab	$a+b$		
(3)	$\boxed{\text{リ}}$	$\boxed{\text{ル}}$	$\boxed{\text{レ}}$	$\boxed{\text{ロ}}$
	$-\frac{3}{2}+\sqrt{2}$	2	2	$-\frac{3}{2}$

【解説】

(1)

$y^2 = 2x$ の両辺を x で微分すると $2y \frac{dy}{dx} = 2$ となるため、 $y \neq 0$ のとき $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$ である。ここで、

点 $A\left(\frac{9}{2}, 3\right)$, $B\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$ での接線をそれぞれ l, m とすると、その方程式はそれぞれ

$$\begin{cases} l: y = \frac{1}{3}\left(x - \frac{9}{2}\right) + 3 \\ m: y = 2\left(x - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{2} \end{cases}$$

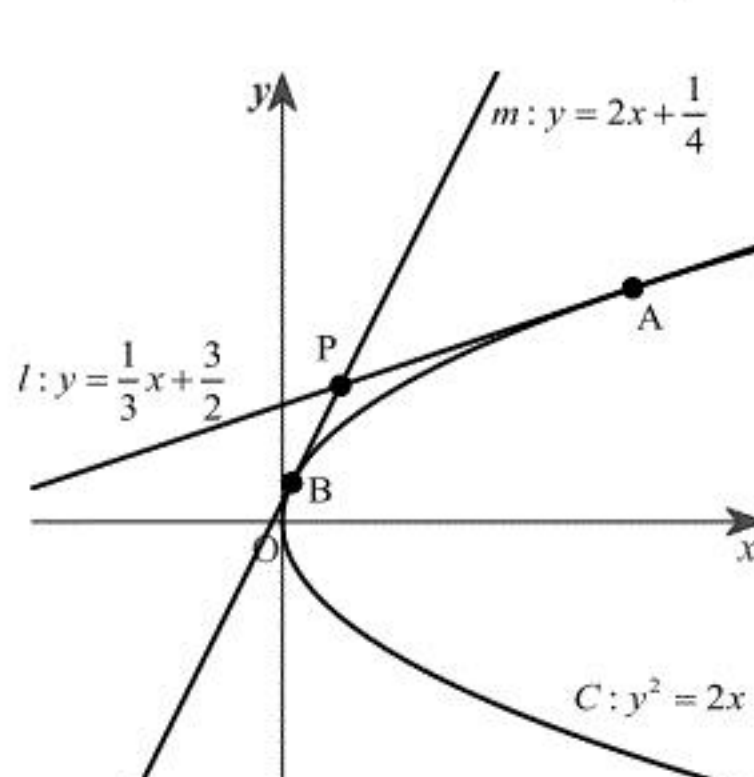
$$\therefore \begin{cases} l: y = \frac{1}{3}x + \frac{3}{2} \\ m: y = 2x + \frac{1}{4} \end{cases}$$

となる。これらの交点の x 座標は、

$$\frac{1}{3}x + \frac{3}{2} = 2x + \frac{1}{4}$$

$$\therefore x = \frac{3}{4}$$

となり、これを $y = \frac{1}{3}x + \frac{3}{2}$ に代入することで、交点の座標は $P\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{4}\right)$ と求められる。



このとき、 $\overrightarrow{PA} = \left(\frac{15}{4}, \frac{5}{4}\right)$, $\overrightarrow{PB} = \left(-\frac{5}{8}, -\frac{5}{4}\right)$ となることから

$$\begin{aligned} \cos \angle APB &= \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PB}|} \\ &= \frac{\frac{15}{4} \cdot \left(-\frac{5}{8}\right) + \frac{5}{4} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)}{\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2} \sqrt{\left(-\frac{5}{8}\right)^2 + \left(-\frac{5}{4}\right)^2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

となるため、 $\angle APB = \frac{3}{4}\pi$ が得られる。

(2)

まず $a, b \neq 0$ のときを考える。(1)と同様に、

$$\begin{cases} l: y = \frac{1}{a}\left(x - \frac{a^2}{2}\right) + a \\ m: y = \frac{1}{b}\left(x - \frac{b^2}{2}\right) + b \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} l: y = \frac{1}{a}x + \frac{a}{2} \\ m: y = \frac{1}{b}x + \frac{b}{2} \end{cases}$$

となるため、これらの交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}x + \frac{a}{2} &= \frac{1}{b}x + \frac{b}{2} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)x &= \frac{1}{2}(b - a) \end{aligned}$$

の解であるが、ここで $a > b$ であることを用いて、

$$\begin{aligned} x &= \frac{b-a}{2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} \\ &= \frac{ab(b-a)}{2(b-a)} \\ &= \frac{ab}{2} \end{aligned}$$

が得られる。これを $y = \frac{1}{a}x + \frac{a}{2}$ に代入することで、交点の座標を $P(X, Y)$ とするとき、

$X = \frac{ab}{2}, Y = \frac{a+b}{2}$ となる。 $a = 0$ または $b = 0$ のとき、 $a > b$ より、 l, m の方程式のいずれか一方が $x = 0$ となり、このとき (X, Y) はそれぞれ $(X, Y) = \left(0, \frac{b}{2}\right), \left(0, \frac{a}{2}\right)$ となるが、

$X = \frac{ab}{2}, Y = \frac{a+b}{2}$ はこの場合も成立する。したがって $X = \frac{ab}{2}, Y = \frac{a+b}{2}$ である。

(3)

$\overrightarrow{PA} = \left(\frac{a(a-b)}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$, $\overrightarrow{PB} = \left(-\frac{b(a-b)}{2}, -\frac{a-b}{2}\right)$ となることから、

$$\begin{aligned} \cos \angle APB &= \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PB}|} \\ &= \frac{\frac{(a-b)^2}{4} \{a \cdot (-b) + 1 \cdot (-1)\}}{\frac{(a-b)^2}{4} \sqrt{a^2 + 1^2} \sqrt{(-b)^2 + (-1)^2}} \\ &= -\frac{ab+1}{\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}} \end{aligned}$$

である。 $\angle APB = \frac{3}{4}\pi$ のとき、

$$\begin{aligned} -\frac{ab+1}{\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \therefore \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} &= \sqrt{2}(ab+1) \end{aligned}$$

となる。この両辺は正であるため、 $ab+1 > 0$ 、すなわち $X > -\frac{1}{2}$ となる。この下で両辺を 2

乗し、

$$\begin{aligned} (a^2+1)(b^2+1) &= 2(ab+1)^2 \\ \Leftrightarrow a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 &= 2a^2b^2 + 4ab + 2 \\ \Leftrightarrow a^2b^2 - (a^2 + b^2) + 4ab + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2b^2 - (a+b)^2 + 6ab + 1 &= 0 \end{aligned}$$

を得る。ここで、 $X = \frac{ab}{2}, Y = \frac{a+b}{2}$ より $ab = 2X, a+b = 2Y$ が成り立ち、このとき a, b は t の

2 次方程式 $t^2 - 2Yt + 2X = 0$ の異なる 2 実数解であるため、判別式に関して

$Y^2 - 2X > 0 \Leftrightarrow Y^2 > 2X$ となる。この下で、

$$\begin{aligned} (2X)^2 - (2Y)^2 + 12X + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow X^2 - Y^2 + 3X + \frac{1}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(X + \frac{3}{2}\right)^2 - Y^2 &= 2 \\ \therefore \frac{\left(X + \frac{3}{2}\right)^2}{2} - \frac{Y^2}{2} &= 1 \end{aligned}$$

である。このとき $Y^2 = X^2 + 3X + \frac{1}{4}$ であるため、

$$\begin{aligned} Y^2 - 2X &> 0 \\ \Leftrightarrow X^2 + X + \frac{1}{4} &> 0 \\ \Leftrightarrow \left(X + \frac{1}{2}\right)^2 &> 0 \\ \therefore X &\neq -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となるが、 $X > -\frac{1}{2}$ であるため、これは常に成り立つ。また、 $\left(X + \frac{3}{2}\right)^2 = 2 + Y^2 \geq 2$ より

$X \geq -\frac{3}{2} - \sqrt{2}, -\frac{3}{2} + \sqrt{2} \leq X$ であるが、 $X > -\frac{1}{2}$ を考慮すると、点 P は双曲線 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ を x 軸

方向に $-\frac{3}{2}$ だけ平行移動した曲線の $-\frac{3}{2} + \sqrt{2} \leq x$ の部分を動き、 X の最小値は $-\frac{3}{2} + \sqrt{2}$ となる。

〔解答〕

(1)	7
	1

(1)(ii)

$P(s, t)$ とおくと、これが格子点となるとき s, t は整数となる。ここで

$$\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$$

$$\Leftrightarrow (s, t) = (ma_1 + nb_1, ma_2 + nb_2)$$

$$\therefore \begin{cases} s = ma_1 + nb_1 & \cdots \textcircled{1} \\ t = ma_2 + nb_2 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

となるため、 $\textcircled{1} \times a_2 - \textcircled{2} \times a_1$ より

$$sa_2 - ta_1 = n(a_2b_1 - a_1b_2)$$

が得られる。ここで(i)より $a_2b_1 - a_1b_2 = \pm 1$ であるため、 $n = \pm(sa_2 - ta_1)$ となるが、 s, t, a_1, a_2 はいずれも整数であるため、 n も整数となる。同様に、 $\textcircled{1} \times b_2 - \textcircled{2} \times b_1$ より

$$sb_2 - tb_1 = m(a_1b_2 - a_2b_1)$$

が得られ、 $a_1b_2 - a_2b_1 = \pm 1$ であるため、 $m = \pm(sb_2 - tb_1)$ となるが、 s, t, b_1, b_2 はいずれも整数であるため、 m も整数となる。以上より、 m, n は整数となる。

(証明終)

(2)(i)

3つの格子点と原点 O を頂点とする、面積が最小となる四角形を考える。このとき、原点を基準に、四角形の時計回りに、格子点を順に点 A, B, C としてもよい。

四角形 $OABC$ の面積が最小となるのは $\triangle OAB, \triangle OBC$ の面積がともに最小となるときで、こ

のとき $\triangle OAB = \triangle OBC = \frac{1}{2}$ である。ここで、この四角形の周または内部に格子点 P が存在する

とき、(1)の結果より整数 m, n を用いて $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ と表せる。このとき、点 P が特に $\triangle OAB$ の周または内部に存在する場合

$$0 \leq m \leq 1, 0 \leq n \leq 1, 0 \leq m+n \leq 1$$

を満たすため、 $(m, n) = (0, 0), (1, 0), (0, 1)$ のいずれかに限られるが、このとき点 P はそれぞれ点 O, A, B と一致する。点 P が $\triangle OBC$ の周または内部に存在する場合でも同様に点 P は点 O, B, C のいずれかと一致するため、この四角形の周または内部に含まれる格子点は頂点のみである。

(証明終)

(ii)

四角形 $OABC$ の面積が最小となるとき $\triangle OAB = \triangle OBC = \frac{1}{2}$ であるため、直線 OB と点 A, C と

の距離はそれぞれ等しい。したがって線分 AC の中点は直線 OB 上に存在する。また、こ

で四角形 $OABC$ を対角線 AC で分割すると $\triangle OAC = \triangle ABC = \frac{1}{2}$ も成立するため、同様に考える

と線分 OB の中点も直線 AC 上に存在する。したがって、四角形 $OABC$ の2本の対角線 OB, AC はそれぞれ互いの中点で交わるため、四角形 $OABC$ は平行四辺形である。

(証明終)

〔解説〕

(1)(i)

a_1, a_2, b_1, b_2 はいずれも整数であるため、 $|a_1b_2 - a_2b_1|$ は0以上の整数となる。ここで、

$$\begin{aligned} \triangle OAB &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2} \\ &= \frac{1}{2} |a_1b_2 - a_2b_1| \end{aligned}$$

より、 $\triangle OAB$ が最小のとき、 $|a_1b_2 - a_2b_1|$ もまた最小値をとる。 $|a_1b_2 - a_2b_1| = 0$ とすると $\triangle OAB = 0$ となり不適となる。 $|a_1b_2 - a_2b_1|$ が1をとるのであれば、そのとき $|a_1b_2 - a_2b_1|$ が最小となるが、例えば $(a_1, a_2) = (2, 3), (b_1, b_2) = (3, 5)$ とすると $|a_1b_2 - a_2b_1| = 1$ を満たすため、

$|a_1b_2 - a_2b_1|$ の最小値は1である。このとき $\triangle OAB = \frac{1}{2}$ となり、 $\triangle OAB$ の面積が最小となる。

以上より、 $|a_1b_2 - a_2b_1| = 1$ である。