

1

(1)

$f(x) = \log x + ax^2 - 3x$ ($x > 0$) より

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2ax - 3$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + 2a$$

となる。曲線 $y = f(x)$ は $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ で変曲点をもつことから、

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 + 2a = 0$$

$$\therefore a = 1$$

が成り立ち、このとき確かに $f''(x)$ は $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ で符号が変化するため、変曲点である。

(答) $a = 1$

(2)

方程式 $f(x) = k$ の異なる実数解の個数は、曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = k$ の共有点の個数と一致する。(1)の結果より $a = 1$ であるから

$$f(x) = \log x + x^2 - 3x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2x - 3$$

$$= \frac{2x^2 - 3x + 1}{x}$$

$$= \frac{(2x-1)(x-1)}{x}$$

となる。よって、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

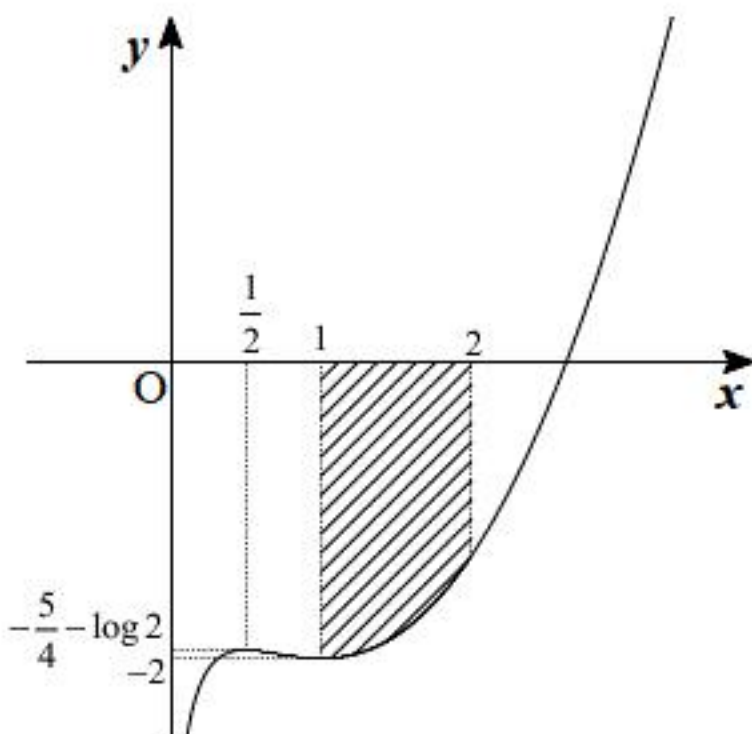
x	(0)	...	$\frac{1}{2}$	...	1	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$		$\nearrow$	$-\frac{5}{4} - \log 2$	$\searrow$	-2	$\nearrow$

また

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} (\log x + x^2 - 3x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \{\log x + x(x-3)\} = \infty$$

であるから、 $y = f(x)$ のグラフは次のようになる。



グラフより、求める方程式の実数解の個数は

$$-2 < k < -\frac{5}{4} - \log 2 \text{ のとき, } 3 \text{ 個}$$

$$k = -2, -\frac{5}{4} - \log 2 \text{ のとき, } 2 \text{ 個}$$

$$k < -2, -\frac{5}{4} - \log 2 < k \text{ のとき, } 1 \text{ 個}$$

となる。

(答) 前述

(3)

(2)の図の斜線部分を、 x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積は

$$\begin{aligned} \pi \int_1^2 \{f(x)\}^2 dx &= \pi \int_1^2 (\log x + x^2 - 3x)^2 dx \\ &= \pi \int_1^2 \left\{ (\log x)^2 + 2(x^2 - 3x) \log x + (x^2 - 3x)^2 \right\} dx \\ &= \pi \int_1^2 (\log x)^2 dx + 2\pi \int_1^2 (x^2 - 3x) \log x dx + \pi \int_1^2 (x^4 - 6x^3 + 9x^2) dx \end{aligned}$$

で求められる。ここで、積分定数を C_1, C_2 とすると、部分積分により

$$\begin{aligned} \int (\log x)^2 dx &= x(\log x)^2 - 2 \int \log x dx \\ &= x(\log x)^2 - 2x \log x + 2 \int dx \\ &= x(\log x)^2 - 2x \log x + 2x + C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 3x) \log x dx &= \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 \right) \log x - \int \left(\frac{1}{3} x^2 - \frac{3}{2} x \right) dx \\ &= \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 \right) \log x - \left(\frac{1}{9} x^3 - \frac{3}{4} x^2 \right) + C_2 \end{aligned}$$

となるから、求める体積は

$$\begin{aligned} &\pi \left[x(\log x)^2 - 2x \log x + 2x + 2 \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 \right) \log x - 2 \left(\frac{1}{9} x^3 - \frac{3}{4} x^2 \right) + \left(\frac{1}{5} x^5 - \frac{3}{2} x^4 + 3x^3 \right) \right]_1^2 \\ &= 2\pi (\log 2)^2 - \frac{32}{3} \pi \log 2 + \frac{434}{45} \pi \end{aligned}$$

である。

(答) $2\pi (\log 2)^2 - \frac{32}{3} \pi \log 2 + \frac{434}{45} \pi$

(1)

放物線 $y = x^2$ 上の点 (t, t^2) における接線の方程式は

$$y' = 2x$$

より

$$y = 2t(x - t) + t^2 = 2tx - t^2$$

である。よって、点 A, B における接線の方程式はそれぞれ

$$y = 2ax - a^2$$

$$y = 2bx - b^2$$

となる。ここで、2 接線の交点 C の x 座標は

$$2ax - a^2 = 2bx - b^2$$

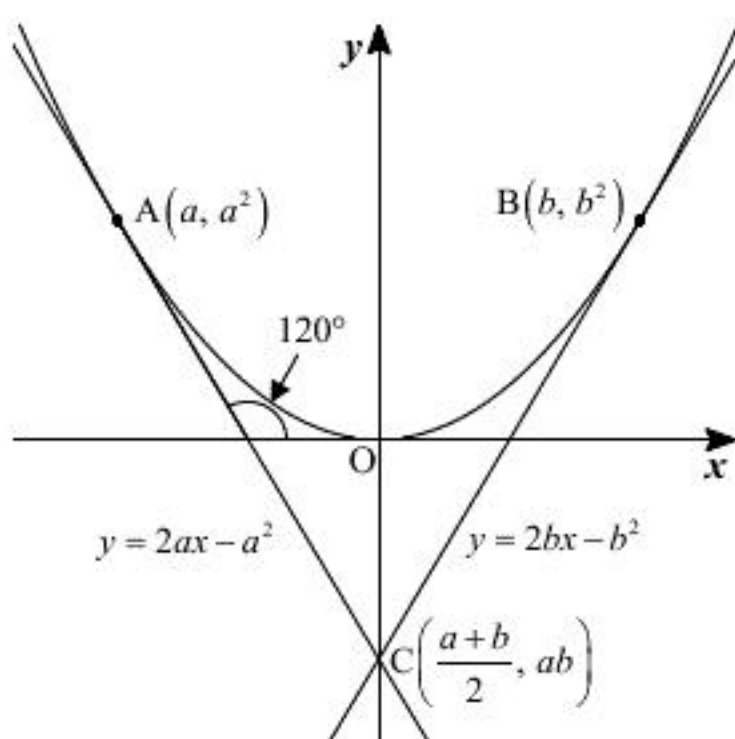
$$\Leftrightarrow 2(b - a)x = (b - a)(a + b)$$

$$\therefore x = \frac{a+b}{2} \quad (\because a < b)$$

と求まるから、点 C の座標は

$$C\left(\frac{a+b}{2}, ab\right)$$

である。



$a + b = 0 \Leftrightarrow b = -a$ のとき、2 点 A, B は y 軸に関して対称であり、点 C は y 軸上にあるから、点 A における接線と x 軸の正の向きがなす角は 120° となる。よって、

$$2a = \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\therefore a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2)

(1)の経過を利用すると、

$$\overline{CA} = \overline{OA} - \overline{OC}$$

$$= (a, a^2) - \left(\frac{a+b}{2}, ab\right)$$

$$= \left(\frac{a-b}{2}, a(a-b)\right)$$

$$= -\frac{b-a}{2}(1, 2a)$$

$$\overline{CB} = \overline{OB} - \overline{OC}$$

$$= (b, b^2) - \left(\frac{a+b}{2}, ab\right)$$

$$= \left(\frac{b-a}{2}, b(b-a)\right)$$

$$= \frac{b-a}{2}(1, 2b)$$

となるから、 $k = \frac{b-a}{2}$ とおくと、 $a < b$ から $k > 0$ となり

$$\overline{CA} = -k(1, 2a)$$

$$\overline{CB} = k(1, 2b)$$

と表すことができる。

(証明終)

(3)

2 点 A, B における接線が x 軸の正の向きとなす角をそれぞれ α, β ($0^\circ < \alpha, \beta < 180^\circ$) とおくと

$$\tan \alpha = 2a, \tan \beta = 2b$$

となる。ここで

$$\overline{CA} \cdot \overline{CB} = |\overline{CA}| |\overline{CB}| \cos 60^\circ > 0$$

$$\Leftrightarrow -k^2(1 + 4ab) > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + 4ab < 0 \quad (\because k > 0)$$

$$\Leftrightarrow ab < -\frac{1}{4}$$

となり、条件 $a < b$ より

$$a < 0 < b$$

となる。よって

$$90^\circ < \alpha < 180^\circ \quad \dots \textcircled{1}$$

$$0^\circ < \beta < 90^\circ \quad \dots \textcircled{2}$$

がわかる。ここで、

$$\angle ACB = 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow \alpha - \beta = 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow \beta = \alpha - 60^\circ$$

となるから、これを②に代入して

$$0^\circ < \alpha - 60^\circ < 90^\circ$$

$$\Leftrightarrow 60^\circ < \alpha < 150^\circ$$

となる。よって、①と合わせると

$$90^\circ < \alpha < 150^\circ \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。同様に、 $\alpha = \beta + 60^\circ$ であるから、これを①に代入して

$$90^\circ < \beta + 60^\circ < 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow 30^\circ < \beta < 120^\circ$$

となる。よって、②と合わせると

$$30^\circ < \beta < 90^\circ \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。以上③、④より、

$$a = \frac{1}{2} \tan \alpha < \frac{1}{2} \tan 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$b = \frac{1}{2} \tan \beta > \frac{1}{2} \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

が示された。

(証明終)

(4)

(3)の結果より、 $\beta = \alpha - 60^\circ$ であるから、

$$b = \frac{1}{2} \tan \beta$$

$$= \frac{1}{2} \tan(\alpha - 60^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\tan \alpha - \tan 60^\circ}{1 + \tan \alpha \tan 60^\circ}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2a - \sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{3}a}$$

$$= \frac{2a - \sqrt{3}}{4\sqrt{3}a + 2}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad b = \frac{2a - \sqrt{3}}{4\sqrt{3}a + 2}$$

(1)

$f(x) = x(1 - \cos x) - \sin(x + a)$ とおく。このとき、 $f(x)$ の第2次導関数までを求めると、

$$f'(x) = 1 - \cos x + x \sin x - \cos(x + a)$$

$$f''(x) = 2 \sin x + x \cos x + \sin(x + a)$$

となる。ここで、 $2n\pi < x < 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ と $0 < a < \frac{\pi}{2}$ より、 $f''(x)$ の3つの項はいずれも正である

から、 $f''(x) > 0$ となる。よって、 $f'(x)$ は $2n\pi \leq x \leq 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ の範囲で単調増加する。また、

$$\begin{aligned} f'(2n\pi) &= 1 - 1 - \cos(2n\pi + a) \\ &= -\cos a \\ &< 0 \left(\because 0 < a < \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) &= 1 + 2n\pi + \frac{\pi}{2} - \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2} + a\right) \\ &= 2n\pi + \frac{\pi}{2} + \left\{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)\right\} \\ &> 0 \end{aligned}$$

である。よって、 $f'(x)$ は $2n\pi \leq x \leq 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ の範囲で連続であるから、中間値の定理より、

$f'(x) = 0$ は $2n\pi < x < 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ の範囲にただ1つの実数解をもつ。この実数解を $x = \alpha$ とする

と、増減表は次のようになる。

x	$2n\pi$	...	α	...	$2n\pi + \frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

ここで、

$$f(2n\pi) = -\sin(2n\pi + a) = -\sin a < 0 \left(\because 0 < a < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$f(\alpha) < f(2n\pi) < 0$$

$$\begin{aligned} f\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) &= \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2} + a\right) \\ &= 2n\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \cos a\right) \\ &> 0 \quad (\because \pi > 3, \cos a < 1) \end{aligned}$$

である。したがって、 $2n\pi \leq x \leq 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ の範囲で連続であるから、増減表および中間値の定

理より、 $f(x) = 0$ は $2n\pi < x \leq \alpha$ の範囲に解をもたず、 $\alpha < x < 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ の範囲に解をただ1つ

もつ。以上より、題意は示された。

(証明終)

(2)

$$x(1 - \cos x) = \sin(x + a), \quad 2n\pi < x < 2n\pi + \frac{\pi}{2}$$

の解を $x = x_n$ とおくと、

$$x_n(1 - \cos x_n) = \sin(x_n + a)$$

が成り立つ。ここで、 $x_n - 2n\pi = \theta_n$ とおくと、 $0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}$ であり、

$$\begin{aligned} (\theta_n + 2n\pi)\{1 - \cos(\theta_n + 2n\pi)\} &= \sin(\theta_n + 2n\pi + a) \\ \Leftrightarrow (\theta_n + 2n\pi)(1 - \cos \theta_n) &= \sin(\theta_n + a) \end{aligned}$$

が成り立つ。また、 $0 < a < \frac{\pi}{2}$ より $0 < \theta_n + a < \pi$ であるから、

$$0 < \sin(\theta_n + a) \leq 1$$

が成り立つ。よって、 $\theta_n + 2n\pi > 0$ であることに注意すると、

$$0 < 1 - \cos \theta_n = \frac{\sin(\theta_n + a)}{\theta_n + 2n\pi} < \frac{\sin(\theta_n + a)}{2n\pi} \leq \frac{1}{2n\pi}$$

となる。このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n\pi} = 0$$

であるから、はさみうちの原理より、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \cos \theta_n) &= 0 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \theta_n &= 1 \end{aligned}$$

となり、 $0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}$ の範囲において $\cos \theta_n$ が連続かつ単調減少関数であることから、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n &= 0 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 2n\pi) &= 0 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 2n\pi) = 0$

(3)

$0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}$ より $0 < 1 - \cos \theta_n < 1$ であるから、(2)の経過より、

$$\begin{aligned} (\theta_n + 2n\pi)(1 - \cos \theta_n) &= \sin(\theta_n + a) \\ \Leftrightarrow \theta_n + 2n\pi &= \frac{\sin(\theta_n + a)}{1 - \cos \theta_n} \\ \therefore n &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\sin(\theta_n + a)}{1 - \cos \theta_n} - \theta_n \right\} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(x_n - 2n\pi) &= \sqrt{n}\theta_n \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\sin(\theta_n + a)}{1 - \cos \theta_n} - \theta_n \right\} \cdot \theta_n^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\sin(\theta_n + a)}{1 - \cos \theta_n} \cdot \frac{1 + \cos \theta_n}{1 + \cos \theta_n} - \theta_n \right\} \cdot \theta_n^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\sin(\theta_n + a)}{1 - \cos^2 \theta_n} \cdot (1 + \cos \theta_n) - \theta_n \right\} \cdot \theta_n^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left\{ \left(\frac{\theta_n}{\sin \theta_n} \right)^2 (1 + \cos \theta_n) \sin(\theta_n + a) - \theta_n^3 \right\}} \end{aligned}$$

と変形できる。(2)の結果より、 $n \rightarrow \infty$ のとき $\theta_n \rightarrow 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(x_n - 2n\pi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}\theta_n \\ &= \lim_{\theta_n \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left\{ \left(\frac{\theta_n}{\sin \theta_n} \right)^2 (1 + \cos \theta_n) \sin(\theta_n + a) - \theta_n^3 \right\}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \{1^2 \cdot (1 + \cos 0) \cdot \sin(0 + a) - 0^3\}} \\ &= \sqrt{\frac{\sin a}{\pi}} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(x_n - 2n\pi) = \sqrt{\frac{\sin a}{\pi}}$

(1)

$f(b)=ab=6$ となる a, b の組み合わせは

$$(a, b)=(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)$$

の4通りである。また、すべての目の出方は

$$6^2=36 \text{通り}$$

で、これらは同様に確からしい。よって、求める確率は

$$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

である。

(答) $\frac{1}{9}$

(2)

すべての目の出方は

$$6^4=1296 \text{通り}$$

で、これらは同様に確からしい。また、与式は

$$\begin{aligned} f(d) &= ad^3 + bd^2 + cd \\ &= d(ad^2 + bd + c) \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、

$$ad^2 + bd + c \geq 1 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1 + 1 = 3$$

であるから、 $f(d)$ が素数となるのは、

$$\begin{aligned} d &= 1 \text{ かつ } ad^2 + bd + c \text{ が素数} \\ \Leftrightarrow d &= 1 \text{ かつ } a + b + c \text{ が素数} \end{aligned}$$

となる場合である。 $1 \leq a, b, c \leq 6$ より、 $3 \leq a + b + c \leq 18$ であるから、

$$a + b + c = 3, 5, 7, 11, 13, 17$$

のいずれかが成り立つ。

[1] $a + b + c = 3$ のとき

a, b, c の組み合わせは

$$(a, b, c) = (1, 1, 1)$$

の1通りである。

[2] $a + b + c = 5$ のとき

a, b, c の組み合わせは

$$(a, b, c) = (1, 1, 3), (1, 2, 2), (1, 3, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (3, 1, 1)$$

の6通りである。

[3] $a + b + c = 7$ のとき

仮に $a \leq b \leq c$ とすると、取りうる (a, b, c) の組み合わせは

$$(a, b, c) = (1, 1, 5), (1, 2, 4), (1, 3, 3), (2, 2, 3)$$

の4種類である。これらの数字の組の並べ方は、 a, b, c のうち2つが等しい場合は3通り、

a, b, c がすべて異なる場合は6通り考えられる。よって、このときの組み合わせは

$$3 \cdot 3 + 6 = 15 \text{ (通り)}$$

である。

[4] $a + b + c = 11$ のとき

[3]と同様に考えると、 $a + b + c = 11$ かつ $a \leq b \leq c$ を満たす (a, b, c) の組み合わせは

$$(a, b, c) = (1, 4, 6), (1, 5, 5), (2, 3, 6), (2, 4, 5), (3, 3, 5), (3, 4, 4)$$

の6種類である。[3]と同様に並べ方も考慮すると、このときの組み合わせは

$$3 \cdot 3 + 6 \cdot 3 = 27 \text{ (通り)}$$

である。

[5] $a + b + c = 13$ のとき

[3]と同様に考えると、 $a + b + c = 13$ かつ $a \leq b \leq c$ を満たす (a, b, c) の組み合わせは

$$(a, b, c) = (1, 6, 6), (2, 5, 6), (3, 4, 6), (3, 5, 5), (4, 4, 5)$$

の5種類である。[3]と同様に並べ方も考慮すると、このときの組み合わせは

$$3 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 21 \text{ (通り)}$$

である。

[6] $a + b + c = 17$ のとき

a, b, c の組み合わせは

$$(a, b, c) = (5, 5, 6), (5, 6, 5), (6, 6, 5)$$

の3通りである。

以上、[1]～[6]より、求める確率は

$$\frac{1+6+15+27+21+3}{1296} = \frac{73}{1296}$$

である。

(答) $\frac{73}{1296}$

(3)

すべての目の出方は

$$6^6 \text{通り}$$

で、これらは同様に確からしい。ここで、2つの放物線

$$y = ax^2 + bx + c, y = dx^2 + ex + f$$

の共有点の x 座標は、以下の方程式

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= dx^2 + ex + f \\ \Leftrightarrow (a-d)x^2 + (b-e)x + (c-f) &= 0 \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

の実数解である。この方程式がただ1つの実数解をもつ条件を求める。

[1] $a-d=0 \Leftrightarrow a=d$ のとき

①は1次方程式

$$(b-e)x + (c-f) = 0$$

となる。これがただ1つの実数解を持つ条件は

$$b-e \neq 0 \Leftrightarrow b \neq e$$

である。以上の条件を満たす組み合わせの総数は、 $a(=d), c, f$ の値の選び方がそれぞれ

6通り、 b, e の値の選び方が6・5通りであるから、

$$6^3 \cdot 6 \cdot 5 = 6^4 \cdot 5 \text{ (通り)}$$

である。

[2] $a \neq d$ のとき

①は2次方程式になるから、判別式を D とすると

$$D = (b-e)^2 - 4(a-d)(c-f)$$

となる。ここで、①がただ1つの実数解をもつための条件は、

$$D = 0 \Leftrightarrow (b-e)^2 = 4(a-d)(c-f) \quad \cdots \textcircled{2}$$

となることである。このとき、 $a-d, c-f$ は整数であるから、 $(b-e)^2$ は4の倍数となり、

$b-e$ は2の倍数となる。以下、 $b-e$ の値による場合分けを考える。

[i] $b-e=0 \Leftrightarrow b=e$ のとき

②を変形すると、

$$4(a-d)(c-f) = 0$$

$$\therefore c = f \quad (\because a \neq d)$$

となる。以上の条件を満たす組み合わせの総数は、 $b(=e), c(=f)$ の選び方がそれぞれ

6通り、 a, d の選び方が6・5(通り)であるから、

$$6^2 \cdot 6 \cdot 5 = 6^3 \cdot 5 \text{ (通り)}$$

である。

[ii] $b-e=\pm 2$ のとき

②を変形すると、

$$(\pm 2)^2 = 4(a-d)(c-f)$$

$$\Leftrightarrow (a-d)(c-f) = 1$$

となり、 $a-d, c-f$ はいずれも整数であるから、

$$(a-d, c-f) = (\pm 1, \pm 1) \text{ (複号同順)}$$

が満たすべき条件である。ここで、 p, q をさいころの目とすると、 $p-q=\pm 1$ を満たす p, q の組み合わせはそれぞれ5通り、 $p-q=\pm 2$ を満たす p, q の組み合わせはそれぞれ4通りである。したがって、条件を満たす組み合わせの総数は

$$(4+4) \cdot (5 \cdot 5 + 5 \cdot 5) = 400 \text{ (通り)}$$

である。

[iii] $b-e=\pm 4$ のとき

②を変形すると、

$$(\pm 4)^2 = 4(a-d)(c-f)$$

$$\Leftrightarrow (a-d)(c-f) = 4$$

となり、 $a-d, c-f$ はいずれも整数であるから、

$$(a-d, b-c) = (\pm 1, \pm 4), (\pm 2, \pm 2), (\pm 4, \pm 1) \text{ (複号同順)}$$

が満たすべき条件である。ここで、 p, q をさいころの目とすると、 $p-q=\pm 4$ を満たす p, q の組み合わせはそれぞれ2通りである。したがって、[ii]の経過も利用すると、条件を満たす組み合わせの総数は

$$(2+2) \cdot (5 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 5) \cdot 2 = 288 \text{ (通り)}$$

である。

[iv] $|b-e| \geq 6$ のとき

$1 \leq b \leq 6$ かつ $1 \leq e \leq 6$ であるから、このような場合は存在しない。

以上より、求める確率は

$$\frac{6^4 \cdot 5 + 6^3 \cdot 5 + 400 + 288}{6^6} = \frac{1031}{5832}$$

である。

(答) $\frac{1031}{5832}$