1

(1)

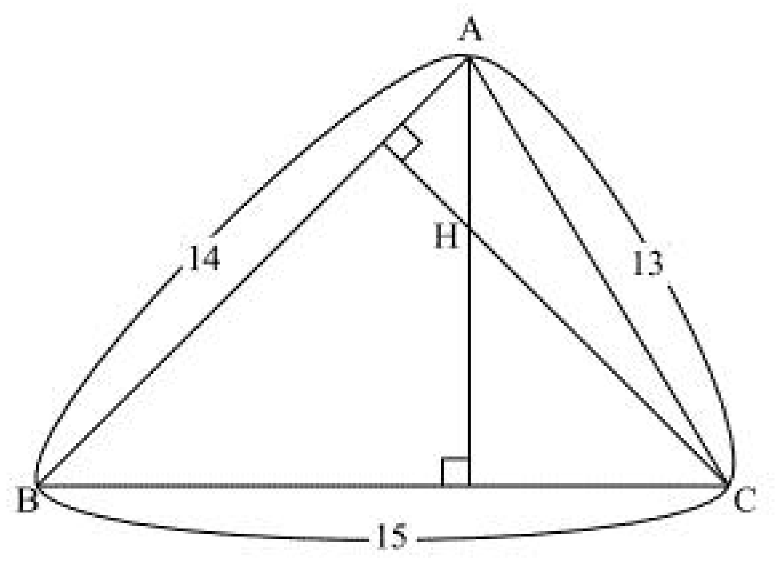
重心の位置ベクトルは，3頂点の位置ベクトルの相加平均で表されるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CG}} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{CC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{3}\\ &= \frac{\vec{0}+\vec{a}+\vec{b}}{3}\\ &= \frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

である。

(答) $\overrightarrow{\mathrm{CG}} = \frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

(2)



$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = s\vec{a}+t\vec{b}$ とおく。$\left|\vec{b}-\vec{a}\right| = 14$ より，両辺を2乗すると，

$$\begin{aligned}&\left|\vec{b}\right|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{a}\right|^2 = 196\\ &\Leftrightarrow 15^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}+13^2 = 196\\ &\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 99\end{aligned}$$

となり，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値が求まる。上図より，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は垂直であるから，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$ となり，

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0\\ &\Leftrightarrow \left(s\vec{a}+t\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right) = 0\\ &\Leftrightarrow t\left|\vec{b}\right|^2 + (s-t)\vec{a}\cdot\vec{b} - s\left|\vec{a}\right|^2 = 0\\ &\Leftrightarrow 225t + 99(s-t) - 169s = 0\\ &\Leftrightarrow -5s+9t = 0\end{aligned}$$

が成り立つ。同様に，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}} = 0$ となり，

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}} = 0\\ &\Leftrightarrow \left(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\vec{b} = 0\\ &\Leftrightarrow s\,\vec{a}\cdot\vec{b}+t\left|\vec{b}\right|^2 - \vec{a}\cdot\vec{b} = 0\\ &\Leftrightarrow 99s+225t-99 = 0\\ &\Leftrightarrow 11s+25t = 11\end{aligned}$$

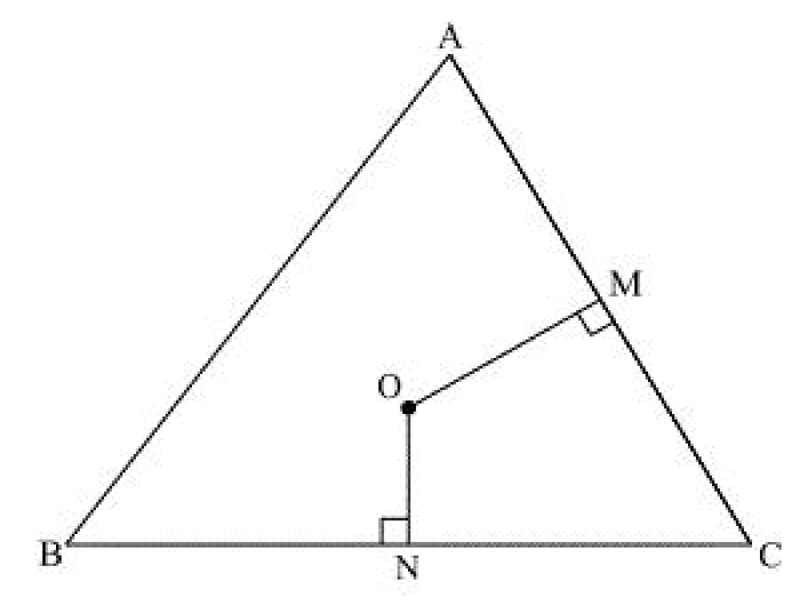
である。これらの2式を連立して解くと，$s = \frac{99}{224}, t = \frac{55}{224}$ となる。よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \frac{99}{224}\vec{a}+\frac{55}{224}\vec{b}$$

である。

(答) $\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \frac{99}{224}\vec{a}+\frac{55}{224}\vec{b}$

(3)



余弦定理を△ABCに用いると，$\cos\mathrm{A} = \frac{13^2+14^2-15^2}{2\cdot13\cdot14} = \frac{5}{13}$ となるから，

$$\sin\mathrm{A} = \sqrt{1-\cos^2\mathrm{A}} = \frac{12}{13}$$

である。したがって求める外接円の半径を R とすれば，正弦定理より，

$$R = \frac{\mathrm{BC}}{2\sin\mathrm{A}} = \frac{15}{2\cdot\frac{12}{13}} = \frac{65}{8}$$

と求まる。ここで，$\overrightarrow{\mathrm{CO}} = u\vec{a}+v\vec{b}$ とおき，辺 CA，辺 BC の中点をそれぞれ M, N とおく。

このとき，$\angle\mathrm{CMO} = \frac{\pi}{2}$ より $\overrightarrow{\mathrm{CM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}} = 0$ となるから，

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{CM}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{CM}}-\overrightarrow{\mathrm{CO}}\right) = 0\\ &\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathrm{CM}}\right|^2 = \overrightarrow{\mathrm{CM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CO}}\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left|\vec{a}\right|^2 = \frac{u}{2}\left|\vec{a}\right|^2+\frac{v}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}\\ &\Leftrightarrow 338u+198v = 169\end{aligned}$$

となる。同様に，$\angle\mathrm{CNO} = \frac{\pi}{2}$ より $\overrightarrow{\mathrm{CN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ON}} = 0$ となるから，

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{CN}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{CN}}-\overrightarrow{\mathrm{CO}}\right) = 0\\ &\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathrm{CN}}\right|^2 = \overrightarrow{\mathrm{CN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CO}}\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left|\vec{b}\right|^2 = \frac{u}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{v}{2}\left|\vec{b}\right|^2\\ &\Leftrightarrow 22u+50v = 25\end{aligned}$$

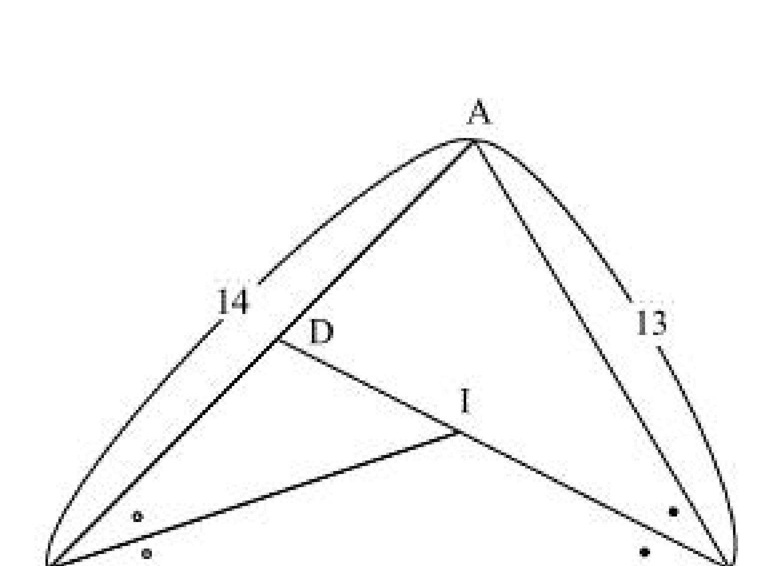
となる。これらの2式を連立して解くと，$u = \frac{125}{448}, v = \frac{169}{448}$ となる。よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{CO}} = \frac{125}{448}\vec{a}+\frac{169}{448}\vec{b}$$

である。

(答) 外接円の半径: $\frac{65}{8}$，$\overrightarrow{\mathrm{CO}} = \frac{125}{448}\vec{a}+\frac{169}{448}\vec{b}$

(4)



内接円の半径を r とする。△ABCの面積は，$\frac{1}{2}r\cdot\left(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}\right)$，$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin\mathrm{A}$ と2通りに表せる。よって，内接円の半径は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}r\cdot(14+15+13) = \frac{1}{2}\cdot14\cdot13\cdot\frac{12}{13}\\ &\Leftrightarrow 21r = 84\\ &\Leftrightarrow r = 4\end{aligned}$$

と求まる。ここで，角の2等分線の性質より $\mathrm{AD}:\mathrm{DB} = 13:15$ だから，

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \frac{15}{28}\vec{a}+\frac{13}{28}\vec{b}$$

である。同様に，$\mathrm{CI}:\mathrm{ID} = \mathrm{BD}:\mathrm{BC} = \left(\frac{15}{28}\cdot14\right):15 = 2:1$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{CI}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \frac{5}{14}\vec{a}+\frac{13}{42}\vec{b}$$

である。

(答) 内接円の半径：4，$\overrightarrow{\mathrm{CI}} = \frac{5}{14}\vec{a}+\frac{13}{42}\vec{b}$

2

(1)

p_1, p_2 を奇数，q_1, q_2 を整数とし，控えめな有理数を $\dfrac{q_1}{p_1}, \dfrac{q_2}{p_2}$ と表す。積と和を計算すると，

$$\frac{q_1}{p_1}\cdot\frac{q_2}{p_2}=\frac{q_1q_2}{p_1p_2}$$
$$\frac{q_1}{p_1}+\frac{q_2}{p_2}=\frac{p_2q_1+p_1q_2}{p_1p_2}$$

となる。これら2数の分子は必ず整数である。また，分母 p_1p_2 は奇数であるから，約分後も必ず奇数となる。したがって，控えめな有理数の積と和はいずれも控えめな有理数となる。ここで，$S\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ は控えめな有理数の積と和で表現されるから，この集合の要素は控えめな有理数である。

(証明終)

(2)

0でない控えめな有理数 a は，k を0以上の整数，p, q を奇数として $a=\dfrac{2^k q}{p}$ と表せる。ここで，$S\langle a\rangle = S\langle 2^k\rangle$ となることを示す。

[1] $y\in S\langle a\rangle$ のとき

x を控えめな有理数とすると，y を

$$y=x\cdot\frac{2^k q}{p}$$

と表せる。ここで，控えめな有理数の積が控えめな有理数であること，2^k は控えめな有理数であることから，

$$x\cdot\frac{2^k q}{p}=\left(x\cdot\frac{q}{p}\right)\cdot 2^k\in S\langle 2^k\rangle$$

となる。以上より，$S\langle a\rangle\subset S\langle 2^k\rangle$ が成り立つ。

[2] $y\in S\langle 2^k\rangle$ のとき

x' を控えめな有理数とすると，k' を0以上の整数，p', q' を奇数として $x'=\dfrac{2^{k'}q'}{p'}$ と表せる。このとき，

$$\begin{aligned}y&=x'\cdot 2^k\\&=\frac{2^{k'}q'}{p'}\cdot 2^k\\&=\frac{2^{k'}q'p}{p'q}\cdot\frac{2^k q}{p}\\&=\frac{2^{k'}q'p}{p'q}\cdot a\end{aligned}$$

となり，$\dfrac{2^{k'}q'p}{p'q}$ は控えめな有理数であるから，$y\in S\langle a\rangle$ である。以上より，$S\langle a\rangle\supset S\langle 2^k\rangle$ が成り立つ。

以上[1], [2]より，$S\langle a\rangle\subset S\langle 2^k\rangle$ かつ $S\langle a\rangle\supset S\langle 2^k\rangle$ であるから，$S\langle a\rangle = S\langle 2^k\rangle$ である。$k=t$ とすれば題意は示される。

(証明終)

(3)

[1] $a_1, \ldots, a_n$ がすべて0でない控えめな有理数のとき

$a_i=\dfrac{2^{k_i}q_i}{p_i}$ (k_i は0以上の整数，p_i, q_i は奇数)と表す。また，k を k_i のうち最小の数字とする。このとき，$k_i-k\geqq 0$ となることに注意する。

[i] $y\in S\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ のとき

$$\begin{aligned}y&=\sum_{i=1}^{n}x_ia_i\\&=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\frac{2^{k_i}q_i}{p_i}\\&=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\frac{2^{k_i-k}q_i}{p_i}\right)\cdot 2^k\end{aligned}$$

と変形できる。ここで，x_i および $\dfrac{2^{k_i-k}\cdot q_i}{p_i}$ はいずれも控えめな有理数であるから，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\frac{2^{k_i-k}q_i}{p_i}$ は控えめな有理数であり，$y\in S\langle 2^k\rangle$ となる。したがって，$S\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\subset S\langle 2^k\rangle$ である。

[ii] $y\in S\langle 2^k\rangle$ のとき

k の定義より，$k_m=k$ を満たす自然数 m ($1\leqq m\leqq n$)が存在する。ここで，ある控えめな有理数を $\dfrac{2^{k'}q'}{p'}$ (k' は0以上の整数，p', q' は奇数)とおくと，

$$\begin{aligned}y&=\frac{2^{k'}q'}{p'}\cdot 2^k\\&=\frac{2^{k'}q'p_m}{p'q_m}\cdot\frac{2^{k_m}q_m}{p_m}\\&=\frac{2^{k'}q'p_m}{p'q_m}\cdot a_m\\&=0\cdot a_1+\cdots+\frac{2^{k'}q'p_m}{p'q_m}\cdot a_m+\cdots+0\cdot a_n\end{aligned}$$

と表せる。0および $\dfrac{2^{k'}q'p_m}{p'q_m}$ は控えめな有理数であるから，$y\in S\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ である。

よって，$S\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\supset S\langle 2^k\rangle$ となる。

以上[i], [ii]より $S\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\subset S\langle 2^k\rangle$ かつ $S\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\supset S\langle 2^k\rangle$ であるから，

$S\langle a_1, \ldots, a_n\rangle = S\langle 2^k\rangle$ である。$2^k=b$ とすれば題意は満たされる。

[2] $a_1, \ldots, a_n$ のうち0であるものが存在するとき

n' を自然数とし，$b_1, \cdots, b_{n'}$ を控えめな有理数と仮定する。$x\in S\langle b_1, \ldots, b_{n'}\rangle$ とすると，x_i ($1\leqq i\leqq n'+1$)を控えめな有理数としたとき，

$$\begin{aligned}x&=\sum_{k=1}^{n'}x_kb_k\\&=\sum_{k=1}^{n'}x_kb_k+x_{n'+1}\cdot 0\\&\in S\langle b_1, \ldots, b_{n'}, 0\rangle\end{aligned}$$

となる。同様に，$x'\in S\langle b_1, \ldots, b_{n'}, 0\rangle$ とすると，

$$\begin{aligned}x'&=\sum_{k=1}^{n'}x_kb_k+x_{n'+1}\cdot 0\\&=\sum_{k=1}^{n'}x_kb_k\\&\in S\langle b_1, \ldots, b_{n'}\rangle\end{aligned}$$

となる。以上より，$S\langle b_1, \ldots, b_{n'}, 0\rangle = S\langle b_1, \ldots, b_{n'}\rangle$ が成り立つ。よって，$a_1, \ldots, a_n$ が全て0の場合，$S\langle a_1, \ldots, a_n\rangle = S\langle 0\rangle$ となり，$b=0$ とすれば題意は満たされる。これ以外の場合，$a_1, \ldots, a_n$ の中から0でない要素のみを取り出し，[1]と同様に考えれば題意は満たされる。

以上[1], [2]より，題意は満たされた。

(証明終)

(4)

(3)までの結果より，k を0以上の整数とすると，$S\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ は $S\langle 2^k\rangle$ または $S\langle 0\rangle$ と表される。まず，$2016\notin S\langle 0\rangle$ である。ここで，$2016=2^5\cdot 3^2\cdot 7$ より，

$$\begin{aligned}2016&=\frac{2^5\cdot 3^2\cdot 7}{1}\\&=\frac{2^{5-k}\cdot 3^2\cdot 7}{1}\cdot 2^k\end{aligned}$$

と変形できるから，$\dfrac{2^{5-k}\cdot 3^2\cdot 7}{1}$ が控えめな有理数になるとき，$2016\in S\langle 2^k\rangle$ となる。これを満たす0以上の整数 k は $0\leqq k\leqq 5$ の6つであるから，2016が属する相異なる集合は6つである。

(答) 6つ

3

(1)

$\left(x-s\right)^2+y^2=r^2 \Leftrightarrow y^2=r^2-\left(x-s\right)^2$ を双曲線の方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ に代入すると,

$$\begin{aligned}&\frac{x^2}{a^2}-\frac{r^2-\left(x-s\right)^2}{b^2}=1\\ &\Leftrightarrow \left(a^2+b^2\right)x^2-2a^2sx+a^2\left(s^2-r^2-b^2\right)=0\\ &\Leftrightarrow s^2x^2-2a^2sx+a^2\left(a^2-r^2\right)=0\\ &\Leftrightarrow \left(sx-a^2\right)^2=\left(ar\right)^2\\ &\Leftrightarrow x=\frac{a\left(a\pm r\right)}{s}\end{aligned}$$

となる。ここで,双曲線の頂点の x 座標は a であるが,

$$\frac{a\left(a-r\right)}{s}=\frac{a\left(a-r\right)}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\left(a-r\right)}{\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}}<a$$

となるから,これは $x \geqq a$ となりえず,この解は双曲線との交点を持たない。ゆえに $x=\dfrac{a\left(a+r\right)}{s}$ のみ考えればよい。$y^2=r^2-\left(x-s\right)^2$ より,この x に対応する y は存在しても高々2個であるから,共有点は高々2個である。よって,題意は示された。

(証明終)

(2)

$f\left(x\right)=\left(a^2+b^2\right)x^2-2a^2sx+a^2\left(s^2-r^2-b^2\right)$ とする。題意を満たすためには,$f\left(x\right)=0$ が $x>0$ の範囲に2つの解をもち,さらにそれぞれに対応する y が2つずつ存在すればよい。すなわち,

$$\begin{aligned}&y^2>0\\ &\Leftrightarrow r^2-\left(x-s\right)^2>0\\ &\Leftrightarrow r>\left|x-s\right|\ (\because r>0)\\ &\therefore s-r<x<s+r\end{aligned}$$

となるような範囲に条件を満たす x が2つ存在すればよい。ここで,

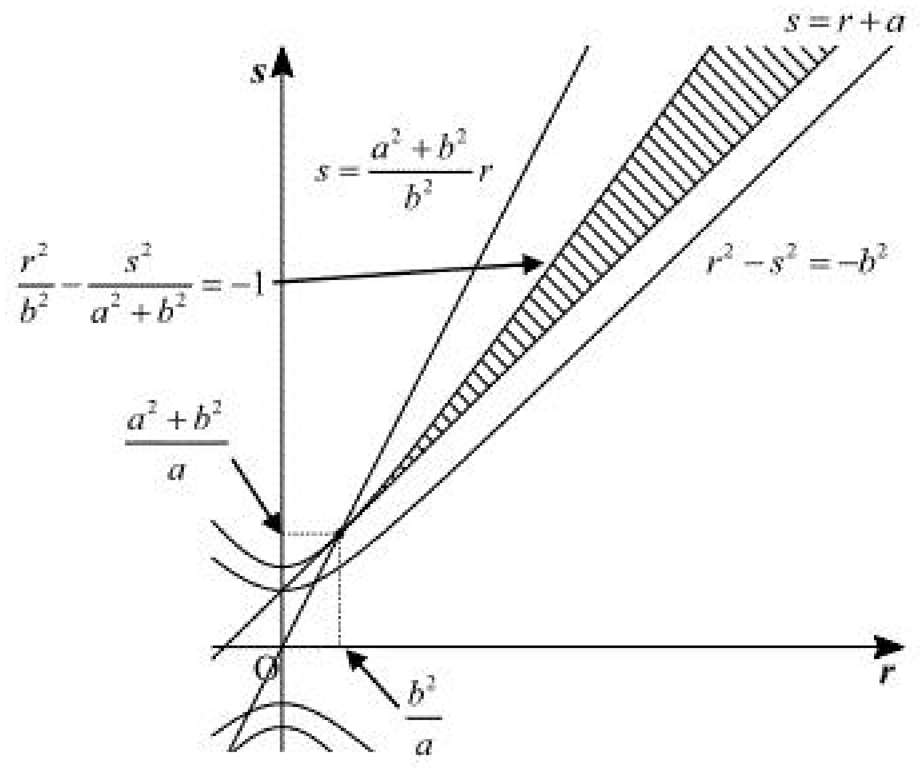
$$f\left(x\right)=\left(a^2+b^2\right)\left(x-\frac{a^2s}{a^2+b^2}\right)^2-\frac{a^4s^2}{a^2+b^2}+a^2\left(s^2-r^2-b^2\right)$$

と変形できるから,$f\left(x\right)$ を2次関数として考えたとき,軸の方程式は $x=\dfrac{a^2s}{a^2+b^2}$ である。よって,満たすべき条件は

$$\begin{cases}f\left(\dfrac{a^2s}{a^2+b^2}\right)<0\\ f\left(s-r\right)>0\\ f\left(s+r\right)>0\\ f\left(0\right)>0\\ s-r<\dfrac{a^2s}{a^2+b^2}<s+r\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{r^2}{b^2}-\dfrac{s^2}{a^2+b^2}>-1\\ s-r<-a,\ a<s-r\\ s+r<-a,\ a<s+r\\ a^2\left(s^2-r^2-b^2\right)>0\\ s<\dfrac{a^2+b^2}{b^2}r\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}s>r+a\\ \dfrac{r^2}{b^2}-\dfrac{s^2}{a^2+b^2}>-1\\ r^2-s^2<-b^2\\ s<\dfrac{a^2+b^2}{b^2}r\end{cases}$$

となる。以上より,求める $\left(r,s\right)$ の範囲は以下の斜線部(境界は含まない)である。



(答) 上図

(3)

題意を満たすためには,$f\left(x\right)=0$ が $x>0$ において重解を持ち,さらにそれに対応する y が2つ存在すればよい。すなわち,$y^2=r^2-\left(x-s\right)^2>0 \Leftrightarrow s-r<x<s+r$ となるような範囲に重解を持てばよい。よって,

$$\begin{cases}f\left(\dfrac{a^2s}{a^2+b^2}\right)=0\\ s-r>0\\ s-r<\dfrac{a^2s}{a^2+b^2}<s+r\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{r^2}{b^2}-\dfrac{s^2}{a^2+b^2}=-1\\ s>r\\ s<\dfrac{a^2+b^2}{b^2}r\end{cases}$$

といった条件を満たせばよい。ここで,$\dfrac{r^2}{b^2}-\dfrac{s^2}{a^2+b^2}=-1$ を整理すると,

$$\frac{s}{r}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}+\frac{a^2+b^2}{r^2}}$$

を得る。よって,$\displaystyle\lim_{r\to\infty}\frac{s}{r}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$ となる。

(答) $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$

4

I．

逆関数を持つためには，x と y が1対1に対応すればよい。すなわち，与えられた定義域内で単調となり，かつ，$x \leqq 1$ における値域と $x \geqq 4$ における値域に重複がないような a の範囲を求めればよい。ここで，$f(x)$ の導関数を計算すると，

$$f'(x) = 6x^2 - 18ax + 12a^2 = 6(x-a)(x-2a)$$

となることから，$x = a, 2a$ の大小で場合分けをする。

[1] $a < 2a$，すなわち $a > 0$ のとき

$f(x)$ は $x = a$ で極大，$x = 2a$ で極小となるから，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	a	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

ゆえに，題意を満たすには，

$1 \leqq a$ かつ $2a \leqq 4$ かつ $f(1) < f(4)$

となればよい。ここで，

$$f(1) < f(4)$$
$$\Leftrightarrow 2 - 9a + 12a^2 < 2 \cdot 64 - 9 \cdot 16a + 12 \cdot 4a^2$$
$$\Leftrightarrow 4a^2 - 15a + 14 > 0$$
$$\therefore a < \frac{7}{4} \text{ または } 2 < a$$

となるから，$a > 0$ より，求める範囲は $1 \leqq a < \frac{7}{4}$ である。

[2] $a = 2a$，すなわち $a = 0$ のとき

$f(x)$ は単調増加するため，逆関数を持つ。

[3] $a > 2a$，すなわち $a < 0$ のとき

$f(x)$ は $x = a$ で極小，$x = 2a$ で極大となるから，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$2a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

ゆえに題意を満たすには，

$1 \leqq 2a$ かつ $a \leqq 4$ かつ $f(1) < f(4)$

であればよいが，$a < 0$ より，これを満たす a は存在しない。

以上[1], [2], [3]より，求める範囲は $a = 0$ または $1 \leqq a < \frac{7}{4}$ である。

(答) $a = 0$ または $1 \leqq a < \frac{7}{4}$

II．

(1)

$y = e^x$ と $y = g(x)$ はただ1点の共有点を持つことから，$b = 0$ のとき，$g(x) = 0$ となり，$y = e^x$ と $y = g(x)$ は共有点をもたず，不適である。ここで，

$\sqrt{x-1}$ は，$x \geqq 1$ の範囲において単調増加

$\sqrt{8x+1}$ は，$x \geqq 0$ の範囲において単調増加であり，$\sqrt{8x+1} \geqq 1$

であるから，これらの合成関数である $\sqrt{\sqrt{8x+1}-1}$ は $x \geqq 0$ の範囲において単調増加である。

よって，$g(x) = b\sqrt{\sqrt{8x+1}-1}$ は $b < 0$ のとき単調減少，$b > 0$ のとき単調増加である。ここで，

$b < 0$ のとき，$y = e^x$ は単調増加，$y = g(x)$ は単調減少となるが，

$$\begin{aligned} g(0) &= b\sqrt{\sqrt{8 \cdot 0 + 1} - 1} \\ &= 0 \\ &< 1 \\ &= e^0 \end{aligned}$$

より，$g(0) < e^0$ となるから，2つの曲線は共有点を持たない。よって $b > 0$ である。このとき，

$y = e^x$ と $y = b\sqrt{\sqrt{8x+1}-1}$ から y を消去すると，

$$e^x = b\sqrt{\sqrt{8x+1}-1}$$

となる。上式は両辺とも0以上であるから，両辺2乗して変形すると，

$$e^{2x} = b^2\left(\sqrt{8x+1}-1\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{e^{2x}+b^2}{b^2} = \sqrt{8x+1}$$

となり，両辺とも0以上であるから，同様に両辺2乗して変形すると，

$$\frac{\left(e^{2x}+b^2\right)^2}{b^4} - (8x+1) = 0$$

となる。左辺を $h(x)$ とおき，$h(x) = 0$ がただ1つの解を持つ b を求めればよい。ここで，

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{2\left(e^{2x}+b^2\right) \cdot 2e^{2x}}{b^4} - 8 \\ &= \frac{4\left(e^{2x}+2b^2\right)\left(e^{2x}-b^2\right)}{b^4} \end{aligned}$$

であり，$e^{2x} > 0$ から，$h'(x) = 0$ となるのは $e^{2x} = b^2 \Leftrightarrow e^x = b$ のときである。よって，$h(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	$\log b$	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	↘	最小	↗

$h(x)$ は $x = \log b$ のときに最小値をとる。ゆえに，$h(\log b) = 0$ となればよく，

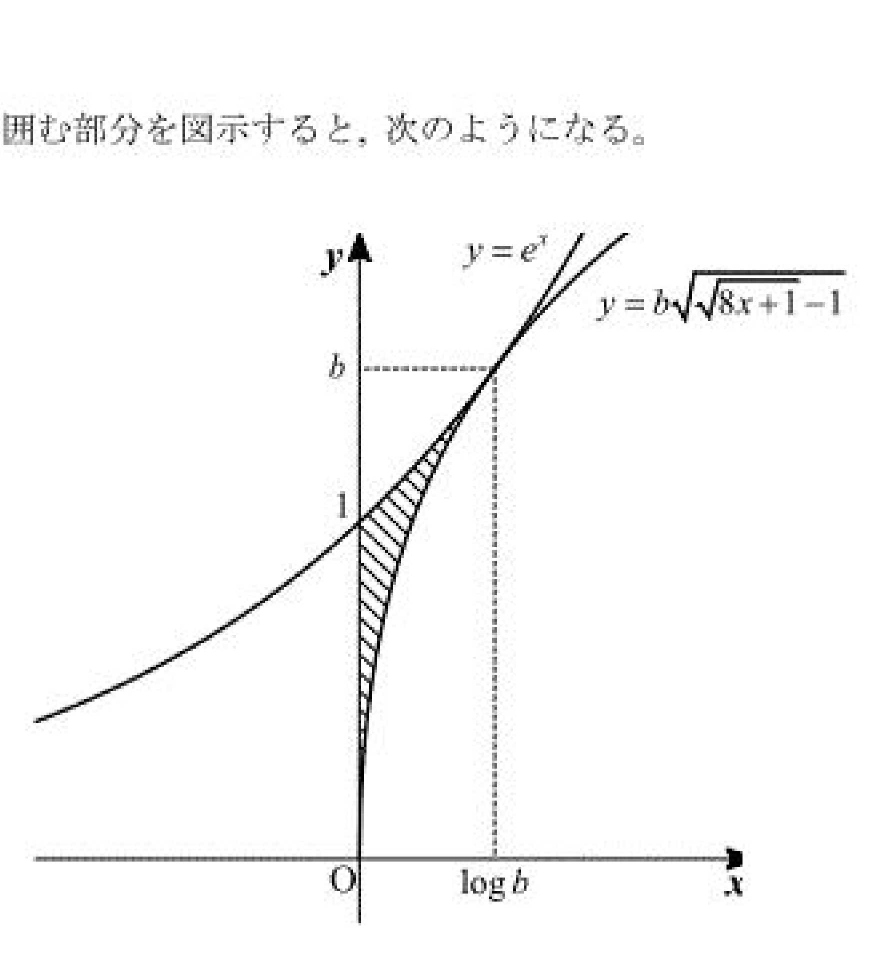
$$h(\log b) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\left(b^2+b^2\right)^2}{b^4} - (8\log b + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \log b = \frac{3}{8}$$
$$\Leftrightarrow b = e^{\frac{3}{8}}$$

となる。

(答) $b = e^{\frac{3}{8}}$

(2)

2つの曲線と y 軸が囲む部分を図示すると，次のようになる。



曲線の方程式を x について解くと，

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \log y$$
$$y = b\sqrt{\sqrt{8x+1}-1} \Leftrightarrow x = \frac{y^4 + 2b^2y^2}{8b^4}$$

となる。よって，上図より求める面積は

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{y^4+2b^2y^2}{8b^4}dy - \int_1^b \log y\,dy &= \left[\frac{\frac{1}{5}y^5 + \frac{2}{3}b^2y^3}{8b^4}\right]_0^b - \left[y\log y - y\right]_1^b \\ &= \frac{13}{120}b - (b\log b - b) - 1 \\ &= \frac{133}{120}b - b\log b - 1 \\ &= \frac{11}{15}e^{\frac{3}{8}} - 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{11}{15}e^{\frac{3}{8}} - 1$