平成 28 年度
医学科一般入試(前期日程)問題

数　　学

(注　意)

1. 問題冊子は試験開始の合図があるまで開かないこと。
2. 問題冊子は表紙のほか 2 ページである。
3. 試験中に問題冊子及び解答用紙の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること。
4. 解答用紙のすべてに受験番号及び氏名をはっきり記入すること。
5. 解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に明瞭に記入すること。
   ただし解答欄が不足する場合は，下書欄(裏面)にはみだしてもよい。
6. 解答に関係のないことを書いた答案は，無効にすることがある。
7. 本学受験票及び大学入試センター試験受験票を机の右上に出しておくこと。
8. 試験時間は 120 分である。
9. 問題冊子は持ち帰ってもよいが，解答用紙は持ち帰らないこと。

数　　学

（各問 50 点）

1 $\triangle$ABC において，AB $= 14$，BC $= 15$，CA $= 13$ とし，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{CB}}$ とする。

(1) $\triangle$ABC の重心 G について $\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2) $\triangle$ABC の垂心 H について $\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(3) $\triangle$ABC の外接円の半径を求め，外心 O について $\overrightarrow{\mathrm{CO}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(4) $\triangle$ABC の内接円の半径を求め，内心 I について $\overrightarrow{\mathrm{CI}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

2 分母が奇数，分子が整数の分数で表せる有理数を「控えめな有理数」と呼ぶことにする。例えば $-\dfrac{1}{3}$，2 はそれぞれ $\dfrac{-1}{3}$，$\dfrac{2}{1}$ と表せるから，ともに控えめな有理数である。1 個以上の有限個の控えめな有理数 $a_1, \ldots, a_n$ に対して，集合 $S\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ を，

$$S\langle a_1, \ldots, a_n\rangle = \{x_1a_1 + \cdots + x_na_n \mid x_1, \ldots, x_n \text{ は控えめな有理数}\}$$

と定める。例えば 1 は $1 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{2}{3} \cdot 2$ と表せるから，$S\langle -\dfrac{1}{3},\ 2\rangle$ の要素である。

(1) 控えめな有理数 $a_1, \ldots, a_n$ が定める集合 $S\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ の要素は控えめな有理数であることを示せ。

(2) 0 でない控えめな有理数 a が与えられたとき，$S\langle a\rangle = S\langle 2^t\rangle$ となる 0 以上の整数 t が存在することを示せ。

(3) 控えめな有理数 $a_1, \ldots, a_n$ が与えられたとき，$S\langle a_1, \ldots, a_n\rangle = S\langle b\rangle$ となる控えめな有理数 b が存在することを示せ。

(4) 2016 が属する集合 $S\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ はいくつあるか。ただし $a_1, \ldots, a_n$ は控えめな有理数であるとし，$a_1, \ldots, a_n$ と $b_1, \ldots, b_m$ が異なっていても，$S\langle a_1, \ldots, a_n\rangle = S\langle b_1, \ldots, b_m\rangle$ であれば，$S\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ と $S\langle b_1, \ldots, b_m\rangle$ は一つの集合として数える。

3 $a,\ b$ を正の定数とし，xy 平面上の双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

をHとする。正の実数 $r,\ s$ に対して，円C：$(x-s)^2+y^2=r^2$ を考える。

(1) Cの中心がHの焦点の一つであるとき，すなわち $s=\sqrt{a^2+b^2}$ のとき，CとHは $x>0$ において高々2点しか共有点を持たないことを示せ。

(2) CとHが $x>0$ において4点の共有点を持つような (r,s) の範囲を，rs 平面上に図示せよ。

(3) CとHが $x>0$ において2点で接するような (r,s) を考えるとき，極限 $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\frac{s}{r}$ を求めよ。

4 Ⅰ．実数 a に対して

$$f(x)=2x^3-9ax^2+12a^2x$$

とおく。定義域を $\{x\,|\,x\leqq 1$ または $x\geqq 4\}$ とする関数 $y=f(x)$ が逆関数を持つような a の範囲を求めよ。

Ⅱ．b を実数とし，$x\geqq 0$ における関数 $g(x)$ を

$$g(x)=b\sqrt{\sqrt{8x+1}-1}$$

と定める。2つの曲線 $y=e^x$ と $y=g(x)$ はただ1点の共有点を持つとする。

(1) b を求めよ。

(2) 2つの曲線 $y=e^x$，$y=g(x)$ と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。