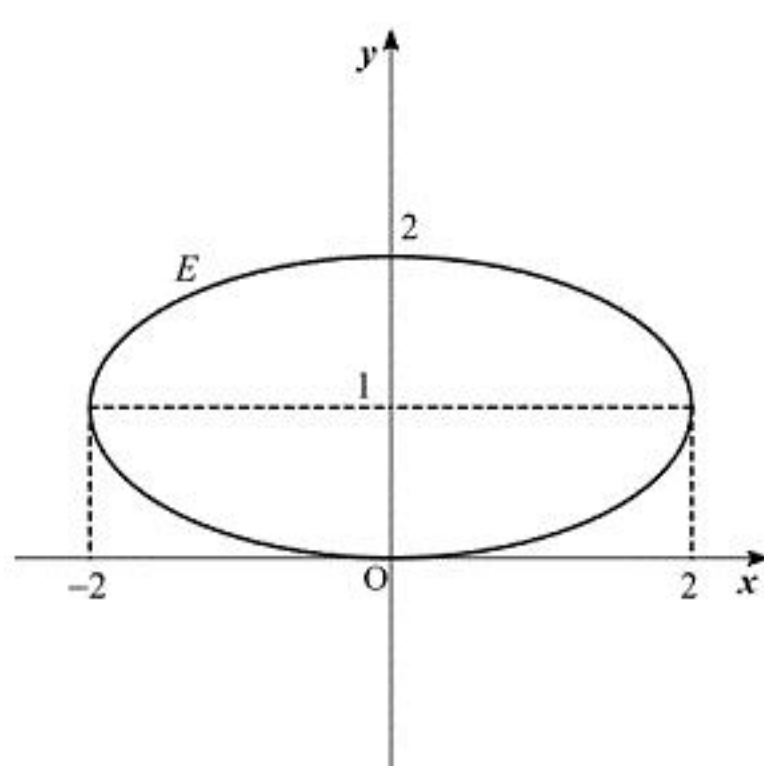


1

(1)

E を図示すると下図のようになる。



$y = x - a$ を E の式に代入して整理すると

$$\frac{x^2}{4} + (x - a - 1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 2(4a + 4)x + 4a^2 + 8a = 0$$

となる。直線 $y = x - a$ と E がただ1つの共有点を持つ必要十分条件は、この2次方程式がただ1つの実数解を持つことである。この式の判別式を D とおくと、求める条件は、

$$\frac{D}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (4a + 4)^2 - 5(4a^2 + 8a) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2a - 4 = 0$$

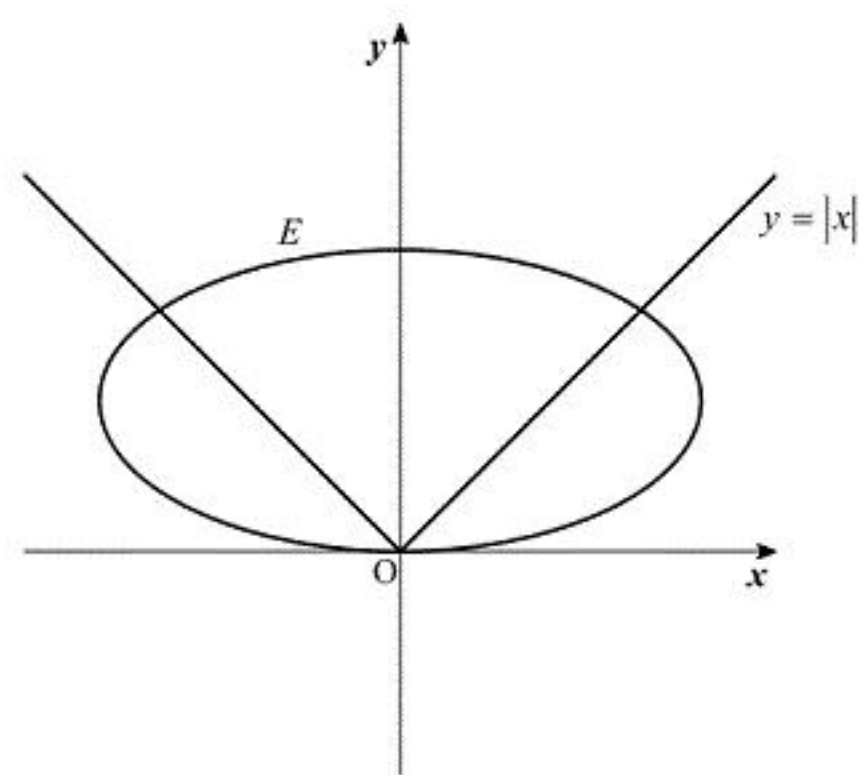
$$\Leftrightarrow a = -1 \pm \sqrt{5}$$

となる。

(答) $a = -1 \pm \sqrt{5}$

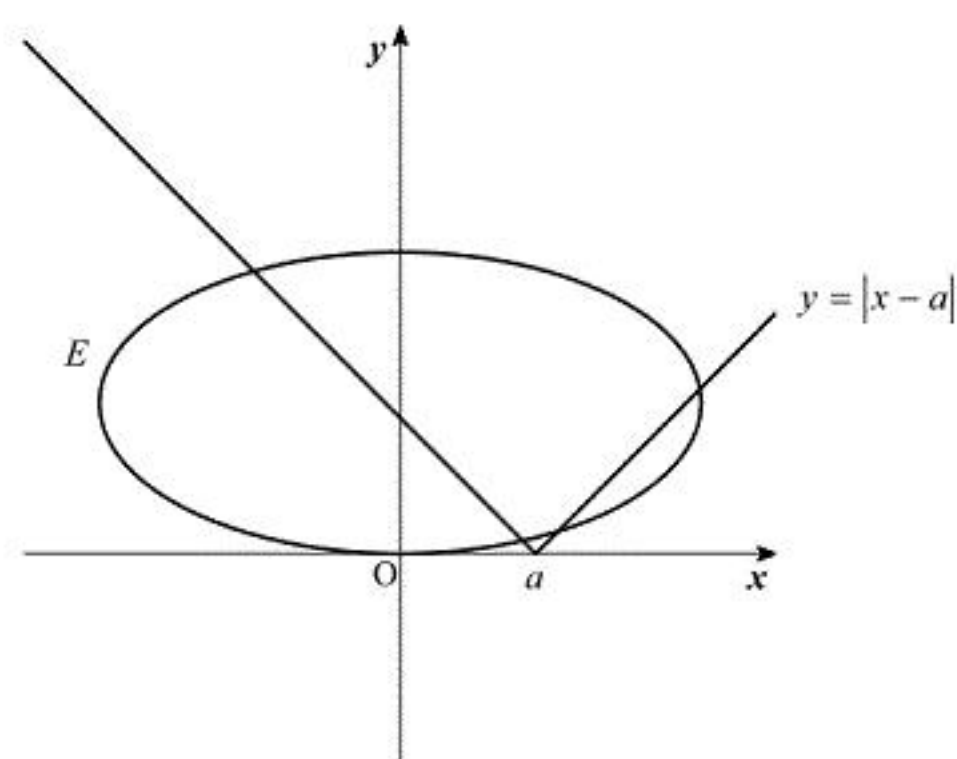
(2)

[1] $a = 0$ のとき



$y = |x - a| = |x|$ のグラフと E の位置関係は上図のようになる。このとき、共有点は3つであるから不適である。

[2] $a > 0$ のとき



$y = |x - a|$ のグラフと E が4つの共有点を持つのは上図のようなときである。(1)の結果より、直線 $y = x - a$ が E と接するのは $a = -1 + \sqrt{5}$ のときである。図より、 a がこの値より小さいときに $y = |x - a|$ のグラフと E は4つの共有点を持つ。よって、 $a > 0$ の下での求める a の範囲は $0 < a < -1 + \sqrt{5}$ となる。

[3] $a < 0$ のとき

[2]の場合と y 軸に対して対称になるから $1 - \sqrt{5} < a < 0$ となる。

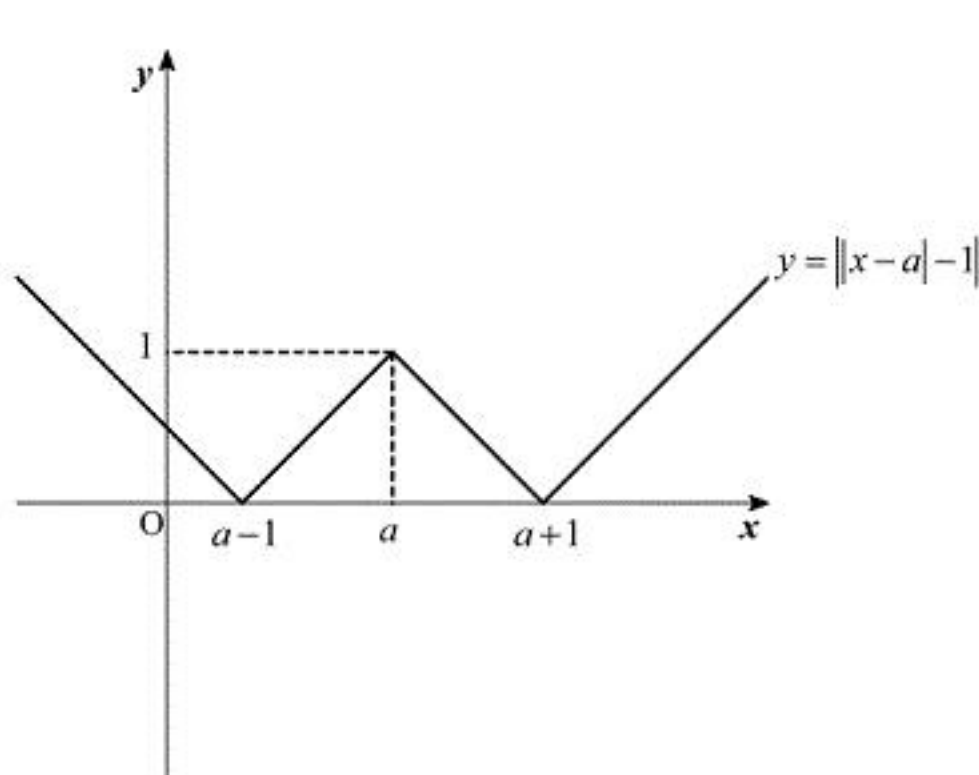
以上[1], [2], [3]より、求める範囲は $1 - \sqrt{5} < a < 0, 0 < a < -1 + \sqrt{5}$ となる。

(答) $1 - \sqrt{5} < a < 0, 0 < a < -1 + \sqrt{5}$

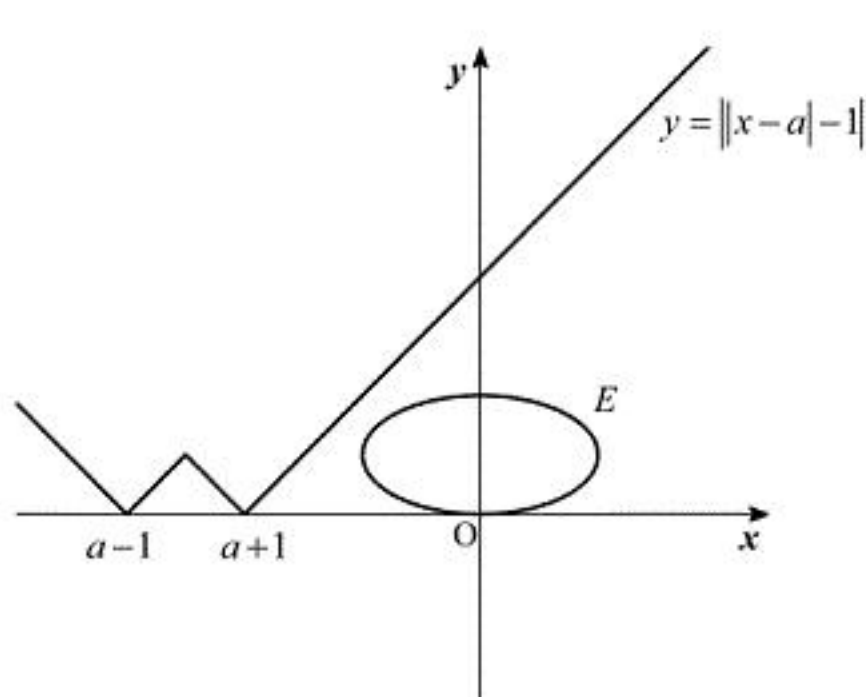
(3)

$y = ||x - a| - 1|$ のグラフは、 $y = |x - a| - 1$ のグラフの $y < 0$ の部分を x 軸に関して折り返したものであり、下図のようになる。

のであり、下図のようになる。



[1] $a \leq 0$ のとき



$y = ||x - a| - 1|$ のグラフと E が共有点を持たないのは上図のようなときである。(1)の結果より、直線 $y = x - (a + 1)$ が E と接するのは $a + 1 = -1 - \sqrt{5} \Leftrightarrow a = -2 - \sqrt{5}$ のときである。図より、 a がこの値より小さいときに $y = ||x - a| - 1|$ のグラフと E は共有点を持たない。よって、 $a \leq 0$ の下での求める a の範囲は、 $a < -2 - \sqrt{5}$ である。

[2] $a > 0$ のとき

[1]の場合と y 軸に対して対称になるから $2 + \sqrt{5} < a$ となる。

以上[1], [2]より、求める a の範囲は $a < -2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5} < a$ である。

(答) $a < -2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5} < a$

(1)

 $\vec{v}=(1,0)$ より

$$f'(t)=1$$

$$g'(t)=0$$

となる。それぞれの両辺を a から b まで t で積分すると

$$f(b)-f(a)=b-a$$

$$g(b)-g(a)=0$$

となる。 $(f(a), g(a))=(0,0)$ を代入して $(f(b), g(b))=(b-a, 0)$ を得る。

$$(\text{答}) \quad (f(b), g(b))=(b-a, 0)$$

(2)

いま,

$$\vec{v}=(f'(t), g'(t))$$

$$=\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}, \frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)$$

$$\overline{P_a P_b}=(f(b)-f(a), g(b)-g(a))$$

$$=\left(\frac{e^b+e^{-b}}{2}-\frac{e^a+e^{-a}}{2}, \frac{e^b-e^{-b}}{2}-\frac{e^a-e^{-a}}{2}\right)$$

である。これらが平行であるとき、ある実数 k を用いて $\overline{P_a P_b}=k\vec{v}$ とかける。すると、

$$\overline{P_a P_b}=k\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{e^b+e^{-b}}{2}-\frac{e^a+e^{-a}}{2}=k \cdot \frac{e^t-e^{-t}}{2} \\ \frac{e^b-e^{-b}}{2}-\frac{e^a-e^{-a}}{2}=k \cdot \frac{e^t+e^{-t}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^b-e^a=ke^t \\ e^{-b}-e^{-a}=-ke^{-t} \end{cases}$$

となる。 $a \neq b, e^t \neq 0$ と $e^b-e^a=ke^t$ より $k \neq 0$ である。このことに注意して k を消去すると、

$$\frac{ke^t}{-ke^{-t}}=\frac{e^b-e^a}{e^{-b}-e^{-a}}$$

$$\Leftrightarrow -e^{2t}=e^a e^b \frac{e^b-e^a}{e^a-e^b}$$

$$\Leftrightarrow e^{2t}=e^{a+b}$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{a+b}{2}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad t=\frac{a+b}{2}$$

(3)

$P_a \neq P_b$ より、 $f(a) \neq f(b)$ と $g(a) \neq g(b)$ の少なくとも一方は成り立つ。対称性より、 $f(a) \neq f(b)$ が成り立つとして一般性を失わない。このとき、

$$K=\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}$$

$$F(t)=g(t)-g(a)-K\{f(t)-f(a)\}$$

とおくと、

$$F(a)=g(a)-g(a)-K\{f(a)-f(a)\}=0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$F(b)=g(b)-g(a)-\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}\{f(b)-f(a)\}=0 \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。また、 $f(t), g(t)$ が微分可能であるから $F(t)$ も微分可能である。よって平均値の定理より

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(t_1) \quad \dots \textcircled{3}$$

を満たす t_1 ($a < t_1 < b$) が存在する。①, ②, ③より

$$F'(t_1)=0$$

となる。すなわち、

$$g'(t_1)-Kf'(t_1)=0$$

である。 $f'(t_1)=0$ なら $g'(t_1)=0$ となり、これは $\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2>0$ に反する。よって

$f'(t_1) \neq 0$ である。したがって、

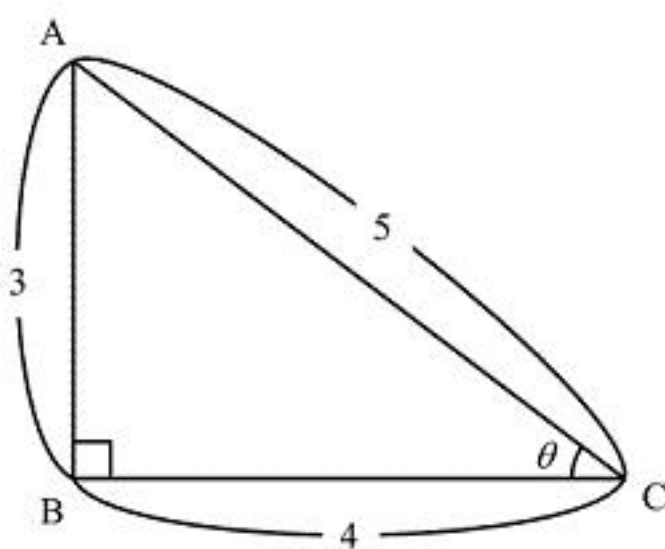
$$g'(t_1)-Kf'(t_1)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{g'(t_1)}{f'(t_1)}$$

が成り立つ。これは時刻 t_1 で $\vec{v}$ が $\overline{P_a P_b}$ と平行になることを表している。よって、ある時刻で $\vec{v}$ が $\overline{P_a P_b}$ と平行になることが示された。

(証明終)

(1)



$AB^2 + BC^2 = CA^2$ と三平方の定理の逆より、 $\angle ABC = 90^\circ$ である。よって $\triangle ABC$ は上図のようになる。 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ であり、また

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} < \frac{3}{5} = \sin \theta$$

が成り立つ。 $\sin x$ は $0^\circ < x < 90^\circ$ で単調増加であるから、 $30^\circ < \theta$ を得る。

(証明終)

(2)

$\tan \theta = \frac{3}{4} < 1 = \tan 45^\circ$ であり、 $\tan x$ は $0^\circ < x < 90^\circ$ で単調増加であるから、 $\theta < 45^\circ$ が成り立つ。

よって、 $0^\circ < 3\theta < 135^\circ < 180^\circ$ である。また、3倍角の公式より

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta \\ &= 4\left(\frac{4}{5}\right)^3 - 3 \cdot \frac{4}{5} \\ &= -\frac{44}{125}\end{aligned}$$

となる。 $-\frac{44}{125} > -\frac{1}{2} = \cos 120^\circ$ であり、 $\cos x$ は $0^\circ < x < 180^\circ$ で単調減少であるから

$$\begin{aligned}3\theta &< 120^\circ \\ \Leftrightarrow \theta &< 40^\circ\end{aligned}$$

を得る。

(証明終)

(3)

まず、 $\cos(180^\circ - 2\theta)$ の値を求めると

$$\begin{aligned}\cos(180^\circ - 2\theta) &= -\cos 2\theta \\ &= -(2\cos^2 \theta - 1) \\ &= -2\left(\frac{4}{5}\right)^2 + 1 \\ &= -\frac{7}{25}\end{aligned}$$

となる。(2)より $\cos 3\theta = -\frac{44}{125}$ であり、

$$-\frac{44}{125} < -\frac{7}{25}$$

が成り立つから、

$$\cos 3\theta < \cos(180^\circ - 2\theta)$$

となる。(1), (2)の結果より、 $0^\circ < 3\theta < 180^\circ$, $0^\circ < 180^\circ - 2\theta < 180^\circ$ であり、 $\cos x$ は $0^\circ < x < 180^\circ$ で単調減少であるから

$$\begin{aligned}3\theta &> 180^\circ - 2\theta \\ \Leftrightarrow 36^\circ &< \theta\end{aligned}$$

を得る。

(証明終)

(4)

まず、数学的帰納法を利用して、 n が自然数のとき $\sin n\theta$, $\cos n\theta$ が有理数であることを示す。

[1] $n=1$ のとき

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{3}{5} \\ \cos \theta &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

であるから、成り立つ。

[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定する

$$\begin{aligned}\sin \{(k+1)\theta\} &= \sin k\theta \cos \theta + \cos k\theta \sin \theta \\ \cos \{(k+1)\theta\} &= \cos k\theta \cos \theta - \sin k\theta \sin \theta\end{aligned}$$

が成り立つ。帰納法の仮定と $n=1$ の場合より、 $\sin k\theta$, $\cos k\theta$, $\cos \theta$, $\sin \theta$ はすべて有理数

であるから、 $\sin \{(k+1)\theta\}$, $\cos \{(k+1)\theta\}$ も有理数である。よって $n=k+1$ の時も成り立つ。

以上[1], [2]より、 n が自然数のとき $\sin n\theta$, $\cos n\theta$ が有理数であることが示された。

$$\sin(0 \cdot \theta) = 0, \cos(0 \cdot \theta) = 1$$

$$\sin \{(-n)\theta\} = -\sin n\theta, \cos \{(-n)\theta\} = \cos n\theta$$

であるから、0以下の整数 n' に対しても $\sin n'\theta$, $\cos n'\theta$ は有理数である。以上より、すべての整数 n に対して $\sin n\theta$, $\cos n\theta$ が有理数であることが示された。

次に、背理法を利用して、

$$n\theta = 30^\circ + m \times 360^\circ$$

となる整数 n, m が存在しないことを示す。すなわち、上の式を満たす整数 n, m が存在すると仮定して矛盾を導く。そのような整数 n, m が存在するとき

$$\begin{aligned}\cos n\theta &= \cos(30^\circ + m \times 360^\circ) \\ \Leftrightarrow \cos n\theta &= \cos 30^\circ \\ \Leftrightarrow \cos n\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

となるが、先にみたように $\cos n\theta$ は有理数であるから、これは矛盾である。よって背理法により

$$n\theta = 30^\circ + m \times 360^\circ$$

となる整数 n, m は存在しないことが示された。

(証明終)

(1) さいころを投げて1が出る事象を A , 1以外が出る事象を B とする。まず $P(3, 2)$ を求める。3回さいころを投げて2回以上連続して1が出るのは、事象が AAA, AAB, BAA のいずれかの順番で起こる場合である。よって

$$P(3, 2)=\left(\frac{1}{6}\right)^3+2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{5}{6}=\frac{11}{216}$$

となる。次に $Q(3, 2)$ を求める。ある目が3回以上出たらそれ以外の目は高々1回しか出ないから、それぞれの目が3回以上連続で出る事象は互いに排反である。また、それらは等確率だから、 $Q(3, 2)$ は1が3回以上連続で出る確率に6をかけたものになる。1が3回以上連続で出るのは、事象が $AAAA, AAAB, BAAA$ のいずれかの順番で起こる場合である。よってその確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^4+2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{5}{6}=\frac{11}{6^4}$$

である。以上より、 $Q(3, 2)=6\times\frac{11}{6^4}=\frac{11}{216}$ となる。

$$\text{(答)}\ P(3, 2)=\frac{11}{216}$$

$$Q(3, 2)=\frac{11}{216}$$

(2) $P(n, 1)$ は n 回さいころを投げて少なくとも1回は1が出る確率である。1回も1が出ない確率を考えて、1から引けばよい。1回も1が出ない確率は、 B が n 回連続して起こる確率であるから、 $\left(\frac{5}{6}\right)^n$ である。したがって、

$$P(n, 1)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

となる。

$$\text{(答)}\ P(n, 1)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

(3) さいころを $n+2$ 回投げて1の目が続けて2回出るのは、
 [1] 1, 2回目に1の目が続けて出る
 [2] 1回目に1の目、2回目に1以外の目が出て、残りの n 回のどこかで1の目が続けて2回出る
 [3] 1回目に1以外の目が出て、残りの $n+1$ 回のどこかで1の目が続けて2回出る
 のいずれかの場合であり、これらは互いに排反である。[1]が起こる確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$$

であり、[2]が起こる確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}P(n, 2)=\frac{5}{36}P(n, 2)$$

であり、[3]が起こる確率は

$$\frac{5}{6}P(n+1, 2)$$

である。以上より、 $P(n+2, 2)$ を $P(n+1, 2)$ と $P(n, 2)$ で表すと

$$P(n+2, 2)=\frac{5}{6}P(n+1, 2)+\frac{5}{36}P(n, 2)+\frac{1}{36}$$

となる。

$$\text{(答)}\ P(n+2, 2)=\frac{5}{6}P(n+1, 2)+\frac{5}{36}P(n, 2)+\frac{1}{36}$$

(4) $n+1$ 回さいころを投げるとき、 k 回目に出た目を a_k とする。数列 $\{b_k\}$ ($k=1, 2, \dots, n$) を

$$b_k=\begin{cases} a_{k+1}-a_k+1 & (a_{k+1}\geq a_k \text{ のとき}) \\ a_{k+1}-a_k+7 & (a_{k+1}<a_k \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定めると、 (a_k, a_{k+1}) の組と b_k の値は以下のように対応する。

b_k の値	(a_k, a_{k+1}) の組
1	(1, 1)(2, 2)(3, 3)(4, 4)(5, 5)(6, 6)
2	(1, 2)(2, 3)(3, 4)(4, 5)(5, 6)(6, 1)
3	(1, 3)(2, 4)(3, 5)(4, 6)(5, 1)(6, 2)
4	(1, 4)(2, 5)(3, 6)(4, 1)(5, 2)(6, 3)
5	(1, 5)(2, 6)(3, 1)(4, 2)(5, 3)(6, 4)
6	(1, 6)(2, 1)(3, 2)(4, 3)(5, 4)(6, 5)

よって、 b_k は1から6までの値を等確率 $\frac{1}{6}$ でとることが分かる。また、 $k\leq n-1$ のとき、上表より、1つの (b_k, b_{k+1}) の組に対して、対応する (a_k, a_{k+1}, a_{k+2}) の組が6つずつ定まることが分かる。すなわち、 (b_k, b_{k+1}) は(1, 1), (1, 2), ..., (6, 6)を等確率 $\frac{1}{36}$ でとる。これは、 b_k, b_{k+1} が独立に値をとることを意味する。数列 $\{b_k\}$ の2つ以上離れた項同士は独立であるから、数列 $\{b_k\}$ は各項が独立に値をとる。したがって、

$$\text{数列}\{b_k\}\text{のどこかで1が}m\text{回以上続く確率}\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}$$

は、

$$n\text{回さいころを投げて1の目が}m\text{回以上続く確率}P(n, m)\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{2}$$

と等しい。ここで、 $b_k=1\Leftrightarrow a_{k+1}=a_k$ より、 $\textcircled{1}$ は、

$$\text{数列}\{a_k\}\text{のどこかで同じ値が}m+1\text{回続く確率}\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{3}$$

と等しい。一方、 $\textcircled{3}$ は、

$$n+1\text{回さいころを投げて同じ目が}m+1\text{回以上続く確率}Q(n, m)\qquad\cdots\cdots\textcircled{4}$$

そのものである。以上より、 $\textcircled{2}=\textcircled{1}=\textcircled{3}=\textcircled{4}$ となり、 $P(n, m)=Q(n, m)$ を得る。

$$\text{(答)}\ P(n, m)=Q(n, m)$$