

1

(1)

$r = 3 + \cos \theta$ より $r' = -\sin \theta$, $r'' = -\cos \theta$ である。したがって

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{\left(r^2 + (r')^2\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2(r')^2 - rr''} \\ &= \frac{\left\{(3 + \cos \theta)^2 + (-\sin \theta)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{(3 + \cos \theta)^2 + 2(-\sin \theta)^2 - (3 + \cos \theta)(-\cos \theta)} \\ &= \frac{\left(\cos^2 \theta + 6 \cos \theta + 9 + \sin^2 \theta\right)^{\frac{3}{2}}}{\cos^2 \theta + 6 \cos \theta + 9 + 2 \sin^2 \theta + 3 \cos \theta + \cos^2 \theta} \\ &= \frac{\left(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 9 + 6 \cos \theta\right)^{\frac{3}{2}}}{2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 9 + 9 \cos \theta} \\ &= \frac{(10 + 6 \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}{11 + 9 \cos \theta} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{(10 + 6 \cos 0)^{\frac{3}{2}}}{11 + 9 \cos 0} \\ &= \frac{16^{\frac{3}{2}}}{20} \\ &= \frac{16}{5} \\ f(\pi) &= \frac{(10 + 6 \cos \pi)^{\frac{3}{2}}}{11 + 9 \cos \pi} \\ &= \frac{4^{\frac{3}{2}}}{2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad f(0) = \frac{16}{5}, f(\pi) = 4$$

(2)

$f(\theta) = \frac{(10 + 6 \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}{11 + 9 \cos \theta}$ であり、 $\cos \theta$ は周期 2π の関数であるから $f(\theta)$ も周期 2π の関数である。したがって $-\pi \leq \theta \leq \pi$ における $f(\theta)$ の増減を調べれば十分である。さらに

$$f(-\theta) = f(\theta)$$

より、 $f(\theta)$ は偶関数であるから、結局 $0 \leq \theta \leq \pi$ における $f(\theta)$ の増減を調べれば十分である。 $f'(\theta)$ を計算すると

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \frac{\frac{3}{2}(-6 \sin \theta)(10 + 6 \cos \theta)^{\frac{1}{2}}(11 + 9 \cos \theta) - (-9 \sin \theta)(10 + 6 \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}{(11 + 9 \cos \theta)^2} \\ &= \frac{-9(10 + 6 \cos \theta)^{\frac{1}{2}}}{(11 + 9 \cos \theta)^2} \cdot \sin \theta \{11 + 9 \cos \theta - (10 + 6 \cos \theta)\} \\ &= \frac{-9(10 + 6 \cos \theta)^{\frac{1}{2}}}{(11 + 9 \cos \theta)^2} \sin \theta (3 \cos \theta + 1) \end{aligned}$$

となる。ここで $0 \leq \theta \leq \pi$ において $3 \cos \theta + 1 = 0$ をみたす θ を α とおくと $\cos \alpha = -\frac{1}{3} < 0$ より

α は $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ の範囲に存在する。したがって $f'(\theta) = 0$ となるのは $\theta = 0, \alpha, \pi$ のときである。

$0 < \theta < \pi$ で $\frac{-9(10 + 6 \cos \theta)^{\frac{1}{2}}}{(11 + 9 \cos \theta)^2} \sin \theta < 0$ だから $f(\theta)$ の $0 \leq \theta \leq \pi$ における増減表は以下のよう

になる。

θ	0	...	α	...	π
$f'(\theta)$	0	-	0	+	0
$f(\theta)$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大

したがって、増減表および前述の議論より、 $f(\theta)$ は $\theta = 0, \pi$ で極大値をとる。

(証明終)

(3)

(2)の増減表と周期性・偶関数の性質より $f(\alpha)$ が $f(\theta)$ の最小値となる。

$3 \cos \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{3}$ より求める最小値は

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{(10 + 6 \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}}{11 + 9 \cos \alpha} \\ &= \frac{\left\{10 + 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\right\}^{\frac{3}{2}}}{11 + 9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} \\ &= \frac{8^{\frac{3}{2}}}{8} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 2\sqrt{2}$$

2

(1)

$a_{n+1} = \frac{a_n - 5}{1 - 5a_n}$ であるから

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{a_{n+1} + 1}{a_{n+1} - 1} i \\ &= \frac{\frac{a_n - 5}{1 - 5a_n} + 1}{\frac{a_n - 5}{1 - 5a_n} - 1} i \\ &= \frac{a_n - 5 + 1 - 5a_n}{a_n - 5 - (1 - 5a_n)} i \\ &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{a_n + 1}{a_n - 1} i \\ &= -\frac{2}{3} b_n \end{aligned}$$

となる。

(答) $b_{n+1} = -\frac{2}{3} b_n$

(2)

条件より

$$a_1 = \frac{3+i}{3-i} = \frac{(3+i)^2}{(3-i)(3+i)} = \frac{4+3i}{5}$$

であるから,

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_1 + 1}{a_1 - 1} i \\ &= \frac{\frac{1}{5}(4+3i) + 1}{\frac{1}{5}(4+3i) - 1} i \\ &= \frac{9+3i}{-1+3i} i \\ &= \frac{(9+3i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)} i \\ &= \frac{1}{10} \cdot (-30i) i \\ &= 3 \end{aligned}$$

となる。したがって(1)の結果と合わせると、数列 $\{b_n\}$ は初項3、公比 $-\frac{2}{3}$ の等比数列であるからその一般項は

$$b_n = 3 \left(-\frac{2}{3} \right)^{n-1}$$

となり、これは実数である。

(証明終)

(3)

$b_n = \frac{a_n + 1}{a_n - 1} i$ を a_n について解くことを考える。(2)より b_n は実数であるから、 $b_n \neq i$ に注意すると

$$a_n = \frac{b_n + i}{b_n - i}$$

となる。したがって

$$a_n + 1 = \frac{b_n + i}{b_n - i} + 1 = \frac{2b_n}{b_n - i}$$

であるから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n + 1| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2b_n}{b_n - i} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|2b_n|}{|b_n - i|} \end{aligned}$$

となる。ここで(2)より b_n は実数であるから、 $|b_n + i| = \sqrt{b_n^2 + 1}$ であり、(2)の b_n の一般項より

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ であることに注意すれば

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n + 1| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|2b_n|}{\sqrt{b_n^2 + 1}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n + 1| = 0$

(4)

(3)より $a_n = \frac{b_n + i}{b_n - i}$ であるから

$$\begin{aligned} |a_n| &= \frac{|b_n + i|}{|b_n - i|} \\ &= \frac{\sqrt{b_n^2 + 1}}{\sqrt{b_n^2 + 1}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。したがってすべての点 a_n は点0を中心とする半径1の円周上にある。

(証明終)

(1)

満たすべき条件は

$$-1 < t < 1 \quad \dots \textcircled{0}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$y = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。①より

$$x > 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

であるから、①、②より

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}} = t \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。よって①と④より

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}} \\ \Leftrightarrow x \sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2-y^2} &= 1 (\because x > 0) \\ \Leftrightarrow x^2-y^2 &= 1 \quad \dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

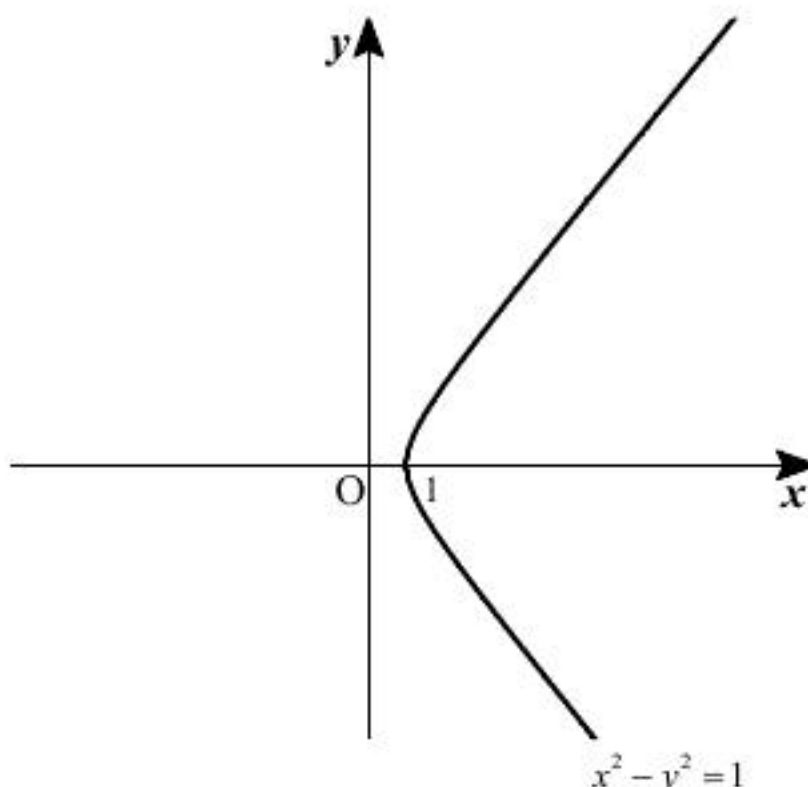
である。また①と④から x, y が動く範囲は

$$\begin{aligned} -1 < \frac{y}{x} < 1 \\ \Leftrightarrow -x < y < x (\because x > 0) \end{aligned}$$

であるが、これは③かつ⑤を仮定すると

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{y^2+1} \\ &> |y| \end{aligned}$$

となることから③かつ⑤に含まれる。以上の考察から①、②で表される曲線は双曲線 $x^2-y^2=1$ の $x>0$ の部分である。これを図示すると次のようになる。



(答) 前図

(2)

問題の方程式を変形すると

$$\begin{aligned} \frac{e^{f(t)} - e^{-f(t)}}{2} &= \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \\ \Leftrightarrow e^{f(t)} - \frac{2t}{\sqrt{1-t^2}} - e^{-f(t)} &= 0 \end{aligned}$$

となる。両辺に $e^{f(t)} (> 0)$ をかけると

$$\left(e^{f(t)}\right)^2 - \frac{2t}{\sqrt{1-t^2}} e^{f(t)} - 1 = 0$$

となる。これを $e^{f(t)}$ の2次方程式とみて解くと

$$\begin{aligned} \left(e^{f(t)} - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2 &= 1 + \frac{t^2}{1-t^2} \\ \therefore e^{f(t)} &= \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \pm \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \end{aligned}$$

となるが $e^{f(t)} > 0$ より

$$e^{f(t)} = \frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}$$

である。したがって両辺の自然対数をとれば

$$\begin{aligned} f(t) &= \log \frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \log \frac{\sqrt{(1+t)^2}}{\sqrt{1-t^2}} (\because 1+t > 0) \\ &= \log \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(t) = \log \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$$

(3)

 $f(t_1) + f(t_2) = f(t_3)$ と(2)の結果から

$$\begin{aligned} f(t_1) + f(t_2) &= f(t_3) \\ \Leftrightarrow \log \sqrt{\frac{1+t_1}{1-t_1}} + \log \sqrt{\frac{1+t_2}{1-t_2}} &= \log \sqrt{\frac{1+t_3}{1-t_3}} \\ \Leftrightarrow \log \sqrt{\frac{1+t_1}{1-t_1}} \cdot \sqrt{\frac{1+t_2}{1-t_2}} &= \log \sqrt{\frac{1+t_3}{1-t_3}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log \frac{(1+t_1)(1+t_2)}{(1-t_1)(1-t_2)} &= \frac{1}{2} \log \frac{1+t_3}{1-t_3} \\ \Leftrightarrow \frac{(1+t_1)(1+t_2)}{(1-t_1)(1-t_2)} &= \frac{1+t_3}{1-t_3} \left(\because \frac{(1+t_1)(1+t_2)}{(1-t_1)(1-t_2)} > 0, \frac{1+t_3}{1-t_3} > 0 \right) \\ \Leftrightarrow (1-t_3)(t_1 t_2 + t_1 + t_2 + 1) &= (1+t_3)(t_1 t_2 - t_1 - t_2 + 1) \\ \Leftrightarrow 2(t_1 t_2 + 1)t_3 &= 2(t_1 + t_2) \\ \therefore t_3 &= \frac{t_1 + t_2}{1 + t_1 t_2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad t_3 = \frac{t_1 + t_2}{1 + t_1 t_2}$$

以下では正四面体の4つの頂点をそれぞれA, B, C, Dとする。

(1)

時刻 $(n-1)$ 分から時刻 n 分までの移動において、アリの動き方の総数は 4^4 通りあり、これらは同様に確からしい。このうち題意を満たす場合の数は時刻 $(n-1)$ 分でのアリの位置によらず、4匹のアリが居合わせる頂点の選び方の総数すなわち4通りに等しい。したがって求める確率は

$$\frac{4}{4^4} = \frac{1}{64}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{64}$$

(2)

1分間の移動において4匹のアリの動き方の総数は 4^4 通りあり、これらは同様に確からしい。

時刻 k 分から時刻 $k+1$ 分 $(k \in \{0, 1, \dots, n-1\})$ でのアリの移動において、どのアリも他のアリと頂点で出会わない場合の数は、4匹のアリがそれぞれ進む頂点を相異なるように選ばねばよいから、 $4! = 24$ 通りである。したがって求める確率は

$$\left(\frac{24}{4^4}\right)^n = \left(\frac{3}{32}\right)^n$$

である。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{3}{32}\right)^n$$

(3)

k を $1 \leq k \leq n$ を満たす整数とする。時刻 $(k-1)$ 分のときそれぞれ別の頂点にいたアリが時刻 $(k-1)$ 分から時刻 k 分までの間に、どのアリも他のアリと頂点でも辺の中点でも出会わないという事象を P_k とし、 P_k が起こる場合の数を動くアリの数で場合分けして数える。

[1] アリが1匹も動かないとき

このときどのアリもほかのアリと頂点でも辺の中点でも出会わないので P_k が起こり、その場合の数は1通り

[2] アリが1匹動くとき

このとき、動いたアリが必ずほかのアリと頂点で出会ってしまうので P_k は起こらない。

[3] アリが2匹動くとき

このとき動いた2匹のアリが必ず辺の中点で出会ってしまうので P_k は起こらない。

[4] アリが3匹動くとき

P_k が起こるのは、動く3匹のアリがいる三角形の頂点上を時計回りまたは反時計回りに移動するときである。動く3匹の選び方は ${}_4C_3 = 4$ 通りあるから、その方法の総数は $4 \times 2 = 8$ 通りである。

[5] アリが4匹動くとき

時刻 $(k-1)$ 分にAにいたアリがBに移動するときを考える。この時 P_k が起こるには時刻 $(k-1)$ 分にBにいたアリはCまたはDに移動する必要がある。Cに移動する場合には時刻 $(k-1)$ 分にC, DにいたアリがそれぞれD, Aに移動するとき、Dに移動する場合には時刻 $(k-1)$ 分にC, DにいたアリがそれぞれA, Cに移動するとき条件を満たす。これは時刻 $(k-1)$ 分にAにいたアリがCまたはDに移動するときも同様であるから条件を満たすのは全部で $2 \times 3 = 6$ 通りある。

以上[1], [2], [3], [4]より P_k が起こる場合の数は $1 + 8 + 6 = 15$ 通りである。よって求める確率は

$$\left(\frac{15}{4^4}\right)^n = \left(\frac{15}{256}\right)^n$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{15}{256}\right)^n$$