

(1)

時刻 $n+1$ に P が A にいるのは、時刻 n に P が A にいて A にとどまる場合、または時刻 n に P が B にいて A に移動する場合であり、これらは排反である。よって

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}b_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。同様に考えると

$$c_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{2}c_n$$

を得る。時刻 $n+1$ に P が B にいるのは、時刻 n に P が B にいて B にとどまる場合、または時刻 n に P が A または C にいて B に移動する場合であり、これらは排反である。よって、

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{2}c_n$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}b_n, b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{2}c_n, c_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{2}c_n$$

(2)

(1)の結果と $a_n + b_n + c_n = 1$ から

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n + c_n) + \frac{1}{3}b_n \\ &= \frac{1}{2}(1 - b_n) + \frac{1}{3}b_n \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6}b_n \end{aligned}$$

となる。変形すると

$$b_{n+1} - \frac{3}{7} = -\frac{1}{6}\left(b_n - \frac{3}{7}\right)$$

である。これは、数列 $\left\{b_n - \frac{3}{7}\right\}$ が初項 $b_0 - \frac{3}{7} = 0 - \frac{3}{7} = -\frac{3}{7}$ 、公比 $-\frac{1}{6}$ の等比数列であることを表すから、

$$\begin{aligned} b_n - \frac{3}{7} &= -\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \\ \therefore b_n &= \frac{3}{7}\left\{1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad b_n = \frac{3}{7}\left\{1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^n\right\}$$

(3)

①と(2)の結果から

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{7}\left\{1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^n\right\}$$

となる。両辺に 2^{n+1} をかけると

$$p_{n+1} = p_n + \frac{2}{7}\left\{2^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

となる。 p の定義と $a_0 = 1$ より $p_0 = 1$ だから $n \geq 1$ のときは

$$\begin{aligned} p_n &= p_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{7}\left\{2^k - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right\} \\ &= 1 + \frac{2}{7}\left[\frac{2^n - 1}{2 - 1} - \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}\right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{7}\left\{2^n + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

となる。これは $n = 0$ のときも $p_0 = 1$ を満たし適する。

$$(\text{答}) \quad p_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{7}\left\{2^n + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

(4)

(2)の結果と $\left|-\frac{1}{6}\right| < 1$ から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{3}{7}$$

である。また(3)の結果から

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{p_n}{2^n} \\ &= \frac{2}{7} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \end{aligned}$$

だから、 $\left|\frac{1}{2}\right| < 1, \left|-\frac{1}{6}\right| < 1$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{7}$$

である。また $c_n = 1 - a_n - b_n$ であったから、上の結果より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} c_n &= 1 - \frac{2}{7} - \frac{3}{7} \\ &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{7}, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{3}{7}, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{2}{7}$$

(1)

まず、与えられた式は z についての恒等式であるから、両辺の次数を比較して、 $k=l$ である。次に、 $k=l$ のとき、 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ を並び替えても $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ にならない、すなわち $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ に含まれない β_i ($i=1, 2, \dots, l$) があるとする、与えられた恒等式の両辺に $z = \beta_i$ を代入して、

$$(\beta_i - \alpha_1)(\beta_i - \alpha_2) \cdots (\beta_i - \alpha_k) = (\beta_i - \beta_1)(\beta_i - \beta_2) \cdots (\beta_i - \beta_l) \cdots (\beta_i - \beta_l)$$

となる。このとき、

$$(\text{左辺}) \neq 0$$

$$(\text{右辺}) = 0$$

となり、不合理となる。ゆえに、 $k=l$ であって、 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ を並び替えると $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ となる。

(証明終)

(2)

$\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ とおく。ド・モアブルの定理より、 $k=1, 2, \dots, n$ に対し

$$\begin{aligned} (\omega^k)^n &= \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right)^n \\ &= \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi \\ &= 1 \end{aligned}$$

だから ω^k ($k=1, 2, \dots, n$) は $z^n = 1$ の解である。また ω の定義とド・モアブルの定理から $\omega, \omega^2, \dots, \omega^n$ は互いに異なる複素数である。 n 次方程式の解は n 個存在するため、 $\omega, \omega^2, \dots, \omega^n$ が求める解のすべてである。

(証明終)

(3)

m が n の約数であるとする、ある自然数 d を用いて $n = md$ と表せる。このとき、 $z^n = 1$ の任意の解 w に対して

$$w^n = w^{md} = (w^m)^d = 1^d = 1$$

であるから w は $z^n = 1$ の解である。逆に $z^m = 1$ の任意の解が $z^n = 1$ の解であるとする。 $m=1$ のときは任意の自然数 n に対して m は n の約数となるのでよい。以下 $m \geq 2$ のときを考える。(2)より $z^m = 1$ の解は $z = \cos \frac{2k\pi}{m} + i \sin \frac{2k\pi}{m}$ ($k=1, 2, \dots, m$) である。

$\xi_k = \cos \frac{2k\pi}{m} + i \sin \frac{2k\pi}{m}$ とおくと、仮定より

$$\xi_k^n = 1$$

であり、 ξ_k の定義とド・モアブルの定理から

$$\xi_k^n = \cos \frac{2kn\pi}{m} + i \sin \frac{2kn\pi}{m}$$

であるから、

$$\frac{2kn\pi}{m} = 2d\pi \quad (d \text{ はある自然数})$$

と書ける。よって

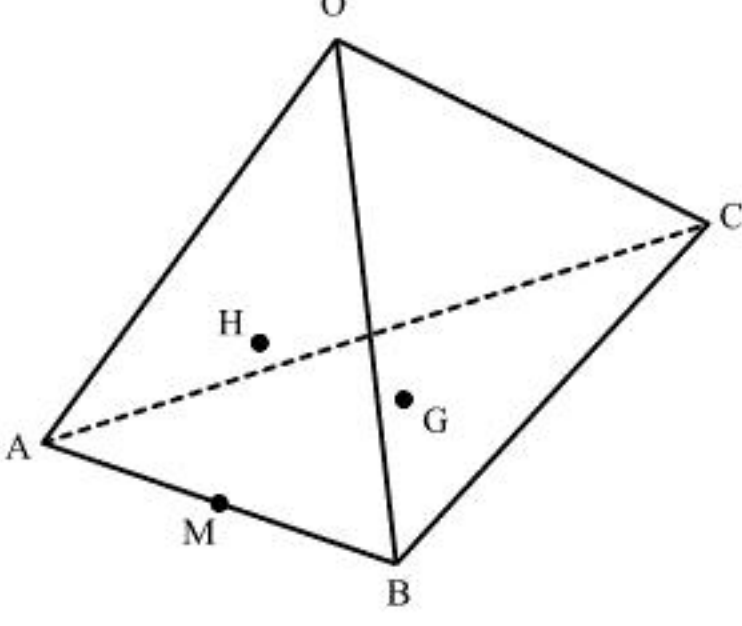
$$kn = md$$

となるので、任意の $k=1, 2, \dots, m$ に対し m は kn の約数である。ゆえに、 $k=m-1$ のとき m と $m-1$ が互いに素であることから、 m は n の約数である。

(証明終)

3

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。



(1) 辺 AB の中点を M とする。このとき、 $\triangle ABC$ の重心は G、 $\triangle OAB$ の重心は H であるから、G, H はそれぞれ線分 CM, OM 上に存在する。よって、H, G はともに平面 OMC 上に存在する。また、直線 OG, CH は平行でないから、直線 OG と直線 CH は交わる。

(証明終)

(2) 点 I は直線 OG 上の点だから、 $\overrightarrow{OI}$ は実数 s を用いて

$$\overrightarrow{OI} = s\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}s\vec{a} + \frac{1}{3}s\vec{b} + \frac{1}{3}s\vec{c}$$

と書ける。また、点 I は直線 CH 上であるから $\overrightarrow{OI}$ は実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OI} &= t\overrightarrow{OH} + (1-t)\overrightarrow{OC} \\ &= \frac{1}{3}t\vec{a} + \frac{1}{3}t\vec{b} + (1-t)\vec{c}\end{aligned}$$

と書ける。 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は一次独立であるから、2 通りに表した $\overrightarrow{OI}$ について係数を比較して、

$$\begin{cases} \frac{s}{3} = \frac{t}{3} \\ \frac{s}{3} = \frac{t}{3} \\ \frac{s}{3} = 1-t \end{cases}$$

であり、これを解くと $s = t = \frac{3}{4}$ である。よって

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

である。

$$(答) \quad \overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

(3)

OI = AI より $|\overrightarrow{OI}|^2 = |\overrightarrow{AI}|^2$ である。これを変形すると

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OI}|^2 &= |\overrightarrow{AI}|^2 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{OI}|^2 &= |\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OA}|^2 \\ \Leftrightarrow \left| \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \right|^2 &= \left| \frac{1}{4}(-3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \right|^2 \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a} &= 9|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} - 6\vec{c} \cdot \vec{a} \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{a}\end{aligned}$$

である。同様に OI = BI, OI = CI より

$$\begin{aligned}|\vec{b}|^2 &= \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{b} \\ |\vec{c}|^2 &= \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c}\end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2 &= |\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 - |\vec{c} - \vec{b}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{a}) - (\vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c}) + 2\vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= 0\end{aligned}$$

であるから $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{BC}|$ すなわち OA = BC を得る。同様に OB = CA と OC = AB も成り立つ。

(証明終)

(4)

題意を満たす球を球 S とおく。球 S と平面 OAB の接点を T とおくと平面 OAB と直線 IT は直交するから

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{IT} = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{IT} = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。T は平面 OAB 上にあるから $\overrightarrow{OT}$ は実数 u, v を用いて

$$\overrightarrow{OT} = u\vec{a} + v\vec{b}$$

と表せるので

$$\overrightarrow{IT} = \left(u - \frac{1}{4}\right)\vec{a} + \left(v - \frac{1}{4}\right)\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c}$$

である。ここで(3)と辺の長さの条件から

$$\begin{cases} l^2 = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{a} \\ \sqrt{2}^2 = \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \sqrt{2}^2 = \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c} \end{cases}$$

であるので、これを整理すると

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{3}{2} \\ \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

である。よって条件①は

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \left\{ \left(u - \frac{1}{4}\right)\vec{a} + \left(v - \frac{1}{4}\right)\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c} \right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(u - \frac{1}{4}\right) \cdot 1^2 + \left(v - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{8} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2u + v &= 1\end{aligned}$$

となり、条件②は

$$\begin{aligned}\vec{b} \cdot \left\{ \left(u - \frac{1}{4}\right)\vec{a} + \left(v - \frac{1}{4}\right)\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c} \right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(u - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(v - \frac{1}{4}\right) \cdot \sqrt{2}^2 - \frac{3}{8} &= 0 \\ \Leftrightarrow u + 4v &= 2\end{aligned}$$

だから①かつ②を解くと

$$u = \frac{2}{7}, v = \frac{3}{7}$$

である。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IT} &= \frac{1}{28}\vec{a} + \frac{5}{28}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c} \\ &= \frac{1}{28}(\vec{a} + 5\vec{b} - 7\vec{c})\end{aligned}$$

である。これより

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{IT}| &= \sqrt{\frac{1}{28}(\vec{a} + 5\vec{b} - 7\vec{c})^2} \\ &= \frac{1}{28}\sqrt{|\vec{a}|^2 + 25|\vec{b}|^2 + 49|\vec{c}|^2 + 10\vec{a} \cdot \vec{b} - 70\vec{b} \cdot \vec{c} - 14\vec{c} \cdot \vec{a}} \\ &= \frac{1}{28}\sqrt{l^2 + 25 \cdot \sqrt{2}^2 + 49 \cdot \sqrt{2}^2 + 10 \cdot \frac{1}{2} - 70 \cdot \frac{3}{2} - 14 \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{42}}{28}\end{aligned}$$

であるので、求める半径は $\frac{\sqrt{42}}{28}$ である。

$$(答) \quad \frac{\sqrt{42}}{28}$$

(1) $g(x)=e^x-ax-b$ とおくと、 $g'(x)=e^x-a$ である。 $a\leq 0$ であるとする $x>0$ で $g'(x)>0$ だから $g(x)$ は $0\leq x\leq 1$ において x の単調増加関数である。よって $0\leq x\leq 1$ で $g(x)=0$ の解は高々1個であり条件を満たさない。よって $a>0$ である。

(証明終)

(2) $a>0$ のとき、 $0\leq x\leq 1$ での $g(x)$ の増減表は

[1] $0<a\leq 1$ のとき

x	0	...	1
$g'(x)$		+	
$g(x)$		↗	

となる。

[2] $1<a<e$ のとき

x	0	...	$\log a$	...	1
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$1-b$	↘	$a-a\log a-b$	↗	$e-a-b$

となる。

[3] $e\leq a$ のとき

x	0	...	1
$g'(x)$		-	
$g(x)$		↘	

となる。

よって $y=e^x$ と $y=ax+b$ が $0\leq x\leq 1$ 上で異なる2点で交わる必要十分条件は

- $1<a<e$
- ...
- ①
- $1-b\geq 0$
- ...
- ②
- $a-a\log a-b<0$
- ...
- ③
- $e-a-b\geq 0$
- ...
- ④

を全て満たすことである。①のもとで

$a-a\log a=a(1-\log a)>0$

であるから③より $b>0$ である。

(証明終)

(3) $y=e^x$ と $y=ax+b$ の交点の x 座標を $\alpha, \beta (\alpha<\beta)$ とおく。(2)の増減表から

$f(x)=\begin{cases} e^x-ax-b & 0\leq x<\alpha, \beta\leq x\leq 1 \text{ のとき} \\ -e^x+ax+b & \alpha\leq x<\beta \text{ のとき} \end{cases}$

となる。これと $g'(x)$ の式から、 $f(x)$ の増減表は以下ようになる。

x	0	...	α	...	$\log a$	...	β	...	1
$f'(x)$		-		+	0	-		+	
$f(x)$	$1-b$	↘	0	↗	$-a+a\log a+b$	↘	0	↗	$e-a-b$

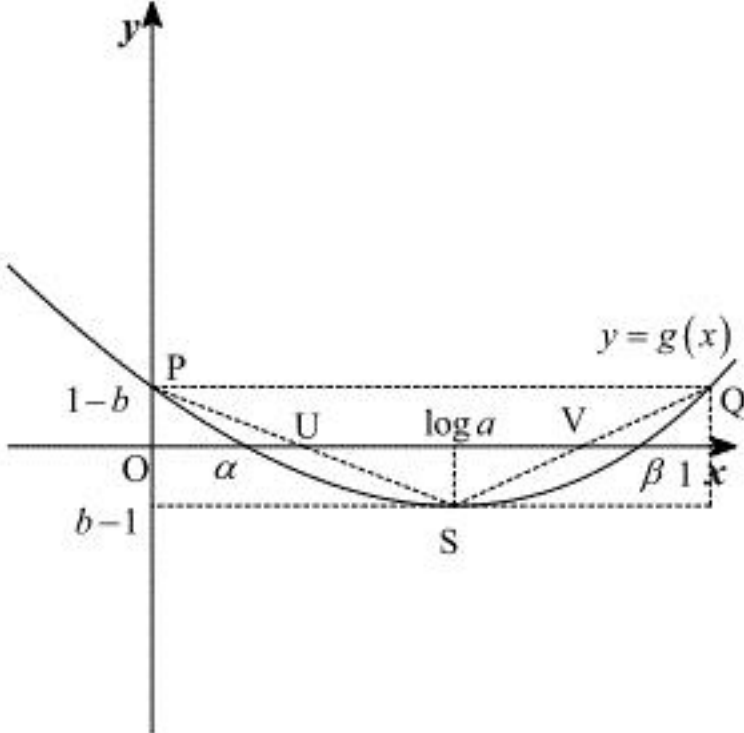
よって $f(x)$ を最大にする x が3個存在するときその x は $x=0, \log a, 1$ である。ゆえに

$1-b=-a+a\log a+b=e-a-b$

が成り立つ。 $1-b=e-a-b$ より $a=e-1$ を得る。これを $1-b=-a+a\log a+b$ に代入、整理して $b=\frac{e}{2}-\frac{e-1}{2}\log(e-1)$ を得る。

(答) $a=e-1, b=\frac{e}{2}-\frac{e-1}{2}\log(e-1)$

(4) (3)のとき $y=g(x)$ のグラフは以下になる。



図のように点 P, Q, R, S, T をとり、 $y=g(x)$ と $x=0, y=0, x=1$ で囲まれた部分の符号付き面積を A 、線分 PS, QS と $x=0, y=0, x=1$ で囲まれる図形の符号付き面積を B とする。また直線 PS と x 軸の交点を U、直線 QS と x 軸の交点を V、U の x 座標を γ 、V の x 座標を δ とする。グラフより $\triangle SUV \sim \triangle SPQ$ であり相似比は1:2である。よって $PQ=1$ より

$\delta-\gamma=\frac{1}{2}$... ⑤

である。 $0<x<1$ で $g''(x)=e^x>0$ だから $y=g(x)$ のグラフは下に凸である。よって

$A<B$

が成り立つ。この式の両辺について⑤を用いると

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2}(1-\delta)(1-b) + \frac{1}{2}\gamma(1-b) - \frac{1}{2}(\delta-\gamma)(1-b) \\ &= \frac{1}{2}(1-b)\{1-\delta+\gamma-(\delta-\gamma)\} \\ &= \frac{1}{2}(1-b)\{1-2(\delta-\gamma)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

であり

$A=\int_0^1 g(x)dx$

だから $\int_0^1 g(x)dx<0$ である。これより $\int_0^1 e^x dx \leq \int_0^1 (ax+b)dx$ を得る。

(証明終)