

〔解答〕

(1)

$$\frac{\pi}{12} < \theta < \frac{5\pi}{12}$$

(2)

$$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$$

(3)

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \pi$$

〔解説〕

(1)

$$4\cos\theta\sin\theta > 1$$

$$\Leftrightarrow \sin 2\theta > \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

である。 $0 \leq \theta < \pi$ のとき、 $0 \leq 2\theta < 2\pi$ であるから、不等式①の解は

$$\frac{\pi}{6} < 2\theta < \frac{5\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12} < \theta < \frac{5\pi}{12}$$

となる。

(2)

$$\cos\theta\sin\theta + \cos^2\theta > 1$$

$$\Leftrightarrow \sin 2\theta + 1 + \cos 2\theta > 2$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

である。 $0 \leq \theta < \pi$ のとき、 $\frac{\pi}{4} \leq 2\theta + \frac{\pi}{4} < \frac{9\pi}{4}$ であるから、不等式②の解は

$$\frac{\pi}{4} < 2\theta + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$$

となる。

(3)

$$\cos^3\theta - \sin^3\theta < 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos\theta - \sin\theta)(\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) < 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

である。 $0 \leq \theta < \pi$ のとき、

$$0 \leq 2\theta < 2\pi$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\sin 2\theta \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow (0 <) \frac{1}{2} \leq 1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta \leq \frac{3}{2}$$

であるから、不等式③は

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) < 0 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

と同値である。 $0 \leq \theta < \pi$ のとき、 $\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4}$ であるから、不等式④の解は

$$\frac{\pi}{2} < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < \theta < \pi$$

となる。

【解答】

(1)	$P_1 = \frac{1}{19380}$
(2)	$\frac{P_2}{P_1} = 5$
(3)	$\frac{P_3}{P_1} = 30$
(4)	$\frac{P_4}{P_1} = 300$

【解説】

すべてのカードの出方は同様に確からしいとする。また、全てのカードを区別して考える。

(1)

最初に 0 のカードが 4 枚続けて出て、5 枚目に 4 のカードが出る確率は

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{{}_4P_4 \times {}_4P_1}{{}_{20}P_5} \\ &= \frac{1}{19380} \end{aligned}$$

となる。

(2)

5 枚取り出したカードの中に 0 のカードが 4 枚と 4 のカードが 1 枚入っている確率は

$$P_2 = \frac{{}_4C_4 \times {}_4C_1}{{}_{20}C_5}$$

となる。ここで、 ${}_nP_r = {}_nC_r \times r!$ であることから、

$$\begin{aligned} \frac{P_2}{P_1} &= \frac{{}_4C_4 \times {}_4C_1}{{}_{20}C_5} \div \frac{{}_4P_4 \times {}_4P_1}{{}_{20}P_5} \\ &= \frac{{}_4C_4 \times {}_4C_1}{{}_{20}C_5} \div \frac{({}_4C_4 \times 4!) \times ({}_4C_1 \times 1!)}{{}_{20}C_5 \times 5!} \\ &= 5 \end{aligned}$$

となる。

(3)

5 枚取り出したカードの中に 0 のカードが 3 枚と 2 のカードが 2 枚入っている確率は

$$P_3 = \frac{{}_4C_3 \times {}_4C_2}{{}_{20}C_5}$$

となる。ここで、 ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$, ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ であることから

$$\begin{aligned} \frac{P_3}{P_1} &= \frac{{}_4C_3 \times {}_4C_2}{{}_{20}C_5} \div \frac{{}_4P_4 \times {}_4P_1}{{}_{20}P_5} \\ &= \frac{\frac{4!}{3!1!} \times \frac{4!}{2!2!}}{{}_{20}C_5} \div \frac{4! \times \frac{4!}{3!}}{{}_{20}C_5 \times 5!} \\ &= 30 \end{aligned}$$

となる。

(4)

取り出した 5 枚のカードの数字について、0 が a 枚、1 が b 枚、2 が c 枚、3 が d 枚、4 が e 枚である場合を (a, b, c, d, e) と書くことにする。数字の合計が 4 になるカードの組み合わせは

$$(4, 0, 0, 0, 1), (3, 1, 0, 1, 0), (3, 0, 2, 0, 0), (2, 2, 1, 0, 0), (1, 4, 0, 0, 0)$$

となる。

[1] $(4, 0, 0, 0, 1), (1, 4, 0, 0, 0)$ のとき

このときの確率はそれぞれ P_2 と一致する。

[2] $(3, 1, 0, 1, 0)$ のとき

このときの確率を P_5 とすると

$$P_5 = \frac{{}_4C_3 \times {}_4C_1 \times {}_4C_1}{{}_{20}C_5}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \frac{P_5}{P_1} &= \frac{{}_4C_3 \times {}_4C_1 \times {}_4C_1}{{}_{20}C_5} \div \frac{{}_4P_4 \times {}_4P_1}{{}_{20}P_5} \\ &= \frac{\frac{4!}{3!1!} \times 4 \times 4}{{}_{20}C_5} \div \frac{4! \times \frac{4!}{3!}}{{}_{20}C_5 \times 5!} \\ &= 80 \end{aligned}$$

である。

[3] $(3, 0, 2, 0, 0)$ のとき

このときの確率は P_3 と一致する。

[4] $(2, 2, 1, 0, 0)$ のとき

このときの確率を P_6 とすると

$$P_6 = \frac{{}_4C_2 \times {}_4C_2 \times {}_4C_1}{{}_{20}C_5}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \frac{P_6}{P_1} &= \frac{{}_4C_2 \times {}_4C_2 \times {}_4C_1}{{}_{20}C_5} \div \frac{{}_4P_4 \times {}_4P_1}{{}_{20}P_5} \\ &= \frac{\frac{4!}{2!2!} \times \frac{4!}{2!2!} \times 4}{{}_{20}C_5} \div \frac{4! \times \frac{4!}{3!}}{{}_{20}C_5 \times 5!} \\ &= 180 \end{aligned}$$

である。

以上[1]～[4]より、

$$\begin{aligned} P_4 &= 2P_2 + P_5 + P_3 + P_6 \\ &= (10 + 80 + 30 + 180)P_1 \\ &= 300P_1 \end{aligned}$$

となるから、

$$\frac{P_4}{P_1} = 300$$

となる。

[1] $\frac{1}{x}$ の整数部分が 0 であるとき

$$0 < \frac{1}{x} < 1$$

$$\Leftrightarrow 1 < x$$

であり, $\frac{1}{x}$ の小数部分が $\frac{1}{x}$ となることから

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 2$$

となる。 $x > 1$ を満たすのは $x = 2$ である。

[2] $\frac{1}{x}$ の整数部分が 1 であるとき

$$1 \leq \frac{1}{x} < 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \leq 1$$

であり, $\frac{1}{x}$ の小数部分が $\frac{1}{x} - 1$ となることから

$$\frac{1}{x} - 1 = \frac{x}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \pm 2\sqrt{2}$$

となる。 $\frac{1}{2} < x \leq 1$ を満たすのは $x = -2 + 2\sqrt{2}$ である。

[3] $\frac{1}{x}$ の整数部分が 2 であるとき

$$2 \leq \frac{1}{x} < 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}$$

であり, $\frac{1}{x}$ の小数部分が $\frac{1}{x} - 2$ となることから

$$\frac{1}{x} - 2 = \frac{x}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 8x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \pm 2\sqrt{5}$$

となる。 $\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}$ を満たすのは $x = -4 + 2\sqrt{5}$ である。

[4] $\frac{1}{x}$ の整数部分が 3 であるとき

$$\frac{1}{x} = 3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

となるが, $\frac{1}{x}$ の小数部分は 0 となり, $\frac{x}{4} (> 0)$ とは一致しえない。よって, 不適である。

以上, [1]~[4]より, 題意を満たす x の値は $x = 2, -2 + 2\sqrt{2}, -4 + 2\sqrt{5}$ である。

(答) $x = 2, -2 + 2\sqrt{2}, -4 + 2\sqrt{5}$

4

(1)

 $-1 \leq x \leq 1$ において

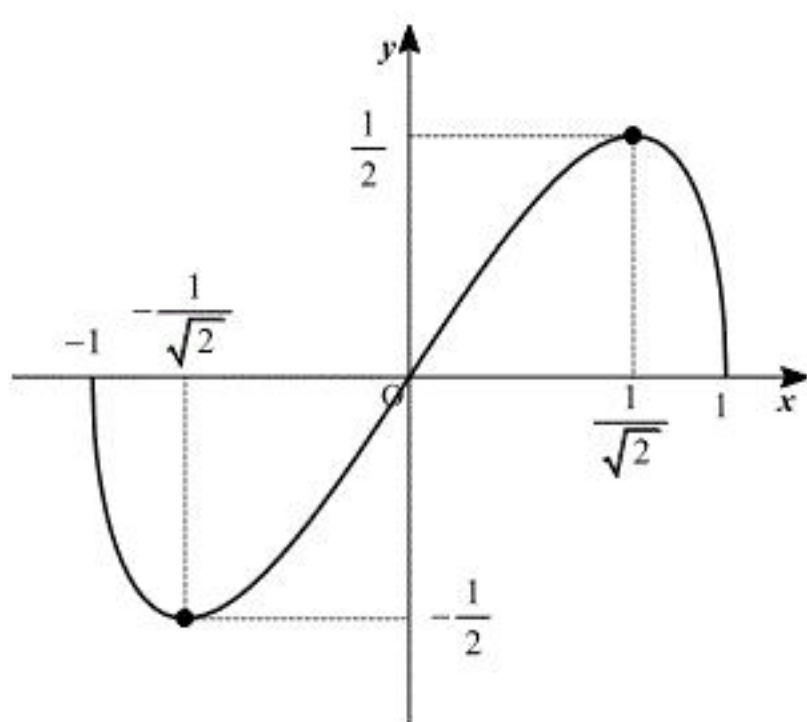
$$f(x) = x\sqrt{1-x^2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{-2\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

となることより、 $f(x)$ の増減は以下のようになる。

x	-1	...	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	1
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

よって、関数 $f(x)$ のグラフの概形は下図のようになる。



(答) 前図

(2)

求める回転体の体積を V_1 とおくと

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_{-1}^1 \left(x\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx \\ &= 2\pi \int_0^1 x^2(1-x^2) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 \\ &= \frac{4}{15}\pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{4}{15}\pi$

(3)

$y = x\sqrt{1-x^2}$ とおくと、

$$y^2 = x^2(1-x^2)$$

より、 $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$ において

$$x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{2}$$

となる。これより、(1)のグラフにおいて

$$-1 \leq x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ の部分は } x = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2}} (=x_1)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x < 0 \text{ の部分は } x = -\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2}} (=x_2)$$

$$0 \leq x < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ の部分は } x = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2}} (=x_3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1 \text{ の部分は } x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2}} (=x_4)$$

にあたる。これより、求める体積を V_2 とすると、

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_{-\frac{1}{2}}^0 (x_1^2 - x_2^2) dy + \pi \int_0^{\frac{1}{2}} (x_4^2 - x_3^2) dy \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2} \right) - \left(\frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2} \right) \right\} dy \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-4y^2} dy \end{aligned}$$

となる。ここで、 $y = \frac{1}{2} \cos \theta$ とおくと、

$$dy = -\frac{1}{2} \sin \theta d\theta$$

y	0	$\rightarrow$	$\frac{1}{2}$
θ	$\frac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	0

となるから、

$$\begin{aligned} V_2 &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-\cos^2 \theta} \left(-\frac{1}{2} \sin \theta \right) d\theta \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\pi^2}{4}$