

(1)

直線 l の傾きは $\tan \theta$ 、 y 切片は $\cos \theta - 1$ なので、その方程式は

$$l: y = \tan \theta \cdot x + \cos \theta - 1$$

これと放物線 C の方程式

$$C: y = x^2 - 1$$

から y を消去して

$$x^2 - \tan \theta \cdot x - \cos \theta = 0 \cdots \textcircled{1}$$

が得られる。①の2解を $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ とすると、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = \tan \theta \cdots \textcircled{2}$$

$$\alpha \cdot \beta = -\cos \theta \cdots \textcircled{3}$$

また、 A, B における C の接線を l_A, l_B とすると、それらの方程式は

$$l_A: y = 2\alpha(x - \alpha) + \alpha^2 - 1$$

$$= 2\alpha x - \alpha^2 - 1 \cdots \textcircled{4}$$

同様に

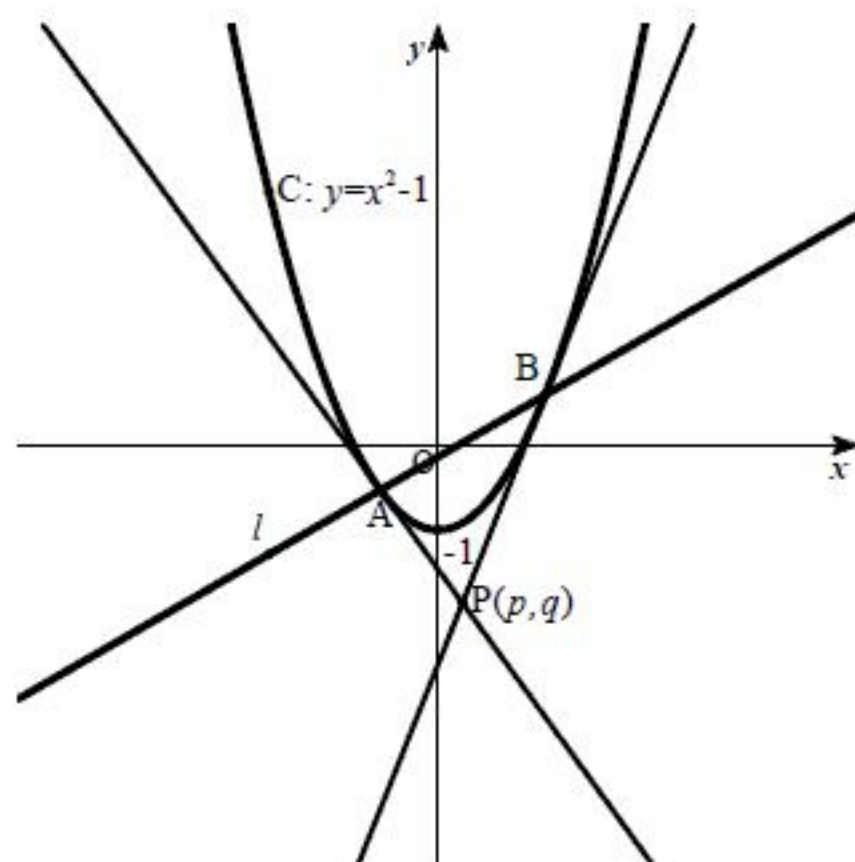
$$l_B: y = 2\beta x - \beta^2 - 1 \cdots \textcircled{5}$$

④, ⑤を連立して解くと、交点 P の座標が求まり、それは次のようになる。

$$P \left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \alpha \cdot \beta - 1 \right)$$

これに②, ③を代入すると $P \left(\frac{\tan \theta}{2}, -\cos \theta - 1 \right)$

$$(\text{答}) \quad P \left(\frac{\tan \theta}{2}, -\cos \theta - 1 \right)$$



(2)

(1)の答より

$$(q+1)\sqrt{4p^2+1} = -\cos \theta \sqrt{\tan^2 \theta + 1}$$

$$= -\cos \theta \times \frac{1}{\cos \theta} \quad (\because \cos \theta > 0)$$

$$= -1$$

$$(\text{答}) \quad -1$$

(1)

$\vec{n}$ は $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ に垂直なので,

$$\vec{n} \cdot \vec{OA} = \vec{n} \cdot \vec{OB} = 0$$

$$\therefore p+q=0, \quad q+1=0$$

よって, $p=1, q=-1$

(答) $p=1, q=-1$

(2)

$$\text{条件より } \vec{OA'} = \vec{OA} + \vec{AA'} = (1, 1, 0) + 2(1, -1, 1) = (3, -1, 2)$$

$$\vec{OB'} = \vec{OB} + \vec{BB'} = (0, 1, 1) + 3(1, -1, 1) = (3, -2, 4)$$

よって, $A'(3, -1, 2)$, $B'(3, -2, 4)$ である。

P は線分 AB 上にあるので, 実数 t ($0 \leq t \leq 1$) を用いて

$$\vec{OP} = t\vec{OA} + (1-t)\vec{OB} \text{ と書け, } P(t, 1, 1-t)$$

$$\begin{aligned} AP^2 + BP^2 &= (t-3)^2 + 2^2 + (-t-1)^2 + (t-3)^2 + 3^2 + (-t-3)^2 \\ &= 4t^2 - 4t + 41 \end{aligned}$$

$$= 4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 40$$

これより, $t = \frac{1}{2}$ のとき最小値 40 をとる。

(答) 最小値 40, P の座標 $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$

(1)

$$a_1 = 1 \cdots \textcircled{1} \quad b_n = 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) - n \cdots \textcircled{2} \quad b_{n+1}^2 - b_n^2 + 1 = 2a_{n+1} \cdots \textcircled{3}$$

$$a_n \neq \frac{1}{2} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \cdots \textcircled{4}$$

①, ②より

$$b_1 = 2a_1 - 1 = 1$$

$$b_2 = 2(a_1 + a_2) - 2 = 2a_2$$

さらに③より

$$b_2^2 = b_1^2 - 1 + 2a_2 = 2a_2$$

以上より

$$b_2^2 = 4a_2^2 = 2a_2$$

よって $2a_2(2a_2 - 1) = 0$ となり, ④から $a_2 = 0$ であると分かる。(答) $a_2 = 0$

(2)

②より

$$b_{n+1} - b_n = 2a_{n+1} - 1$$

③より

$$(b_{n+1} + b_n)(b_{n+1} - b_n) = 2a_{n+1} - 1$$

以上より

$$(b_{n+1} + b_n - 1)(2a_{n+1} - 1) = 0$$

④とあわせて, $b_{n+1} + b_n = 1$

(証明終)

(3)

 $b_1 = 1, b_2 = 0$ と(2)の結果を用いると, $\{b_n\}$ は n が奇数のとき 1 となり, n が偶数のとき 0 となる数列である。よって ③より, $n \geq 2$ のときは $\{a_n\}$ は n が奇数のとき 1 となり, n が偶数のとき 0 となる数列である。これは $n=1$ のときも成り立つ。(答) n が奇数のとき $a_n = 1$, n が偶数のとき $a_n = 0$

$$f(x) = \frac{x-a}{x^2-1}$$

これを微分して

$$f'(x) = \frac{(x^2-1) - 2x(x-a)}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2+2ax-1}{(x^2-1)^2}$$

$-x^2+2ax-1=0$ の判別式を D とおくと

$$\frac{D}{4} = a^2 - 1$$

よって、 $0 < a < 1$ 、 $a = 1$ 、 $1 < a$ で場合分けする。

i) $0 < a < 1$ のとき

$D < 0$ なので、常に $f'(x) < 0$ である。

よって、 $f(x)$ は単調減少し、極値を持たない。

x		-1		1	
$f'(x)$	$-$		$-$		$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$

ii) $a = 1$ のとき

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}$$

これは単調減少し、極値を持たない。

x		-1	
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$

iii) $1 < a$ のとき

$D > 0$ なので、 $f'(x) = 0$ は実数解を 2 個持つ。

この 2 解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると、解と係数の関係より

$\beta = \frac{1}{\alpha} > 1$ なので、増減表は次のようになる。

x		-1		α		1		β	
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$

よって、 $x = \alpha$ で極小値、 $x = \beta$ で極大値をとる。

以上より、 $0 < a \leq 1$ のとき極値を持たず、

$1 < a$ のとき極大値と極小値を 1 つずつ持つ。

(答) 極大値： $0 < a \leq 1$ のとき 0 個、 $1 < a$ のとき 1 個

極小値： $0 < a \leq 1$ のとき 0 個、 $1 < a$ のとき 1 個